

Tesis/
21

UNIVERSIDAD AUTONOMA
DE
MADRID

ANALISIS ESPECTRAL E IDENTIFICACION EN LAS
SERIES ECONOMICAS

Ry. FEE - 26.116 M
me X-54-122453-X



1 de Abril 1976

Tesis que para la obtención del Grado de Doctor,
presenta en la Facultad de Económicas de
la Universidad Autónoma de Madrid Don Juan del
Hoyo Bernat bajo la dirección del catedrático -
ponente Dr. D. Gonzalo Arnaiz Vellando.

Introducción

Una de las principales metas de la Econometría y del análisis de las series temporales consiste en la previsión.

Hasta principios de la década de los setenta la mayor parte de las previsiones que se llevaban a cabo estaban basadas en modelos econométricos con mayor o menor grado de desegregación. Sin embargo a partir de los setenta comienza a observarse un cierto descontento por parte de los economistas al no conseguirse resultados adecuados pese a emplear las técnicas econométricas más sofisticadas.

Por otra parte, y a partir del trabajo de G.E.P. Box y G.M. Jenkins "Some Recent Advances in Forecasting and Control" aparecido en el J.R.S.S.⁽¹⁹⁶⁹⁾, c, pags.91-109, comienza a despertarse el interés de los economistas por un nuevo procedimiento de previsión. Este trabajo inicial fué seguido en 1970 por la obra, de los mismos autores, "Time Series Analysis Forecasting and Control" en la que se desarrollan las ideas apuntadas en el trabajo anterior.

Para abordar los problemas de previsión, que plantea este nuevo enfoque necesitamos conocer un modelo o representación estocástica que se adecue a la serie temporal objeto de nuestro estudio. El modelo que se selecciona es el Mixto (Autorregresivo y de Media Móvil) $ARMA(k_1, k_2)$, de los que son casos particulares los Autorregresivos, $AR(k_1)$ y Medias Móviles $MV(k_2)$.

Independientemente del interés en estos modelos desde un punto de vista predictivo y de control, también pueden relacionarse con las investigaciones de los económetras por el problema de la estimación en modelos con retardos distribuidos, en los que a partir de:

$$y_t = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x(t-j) + u_t$$

obtenemos, $y_t = \beta x(t) + \lambda y(t-1) + u_t - \lambda u_{t-1}$

siendo este el caso especial de ARMA(1,1), pudiéndose demostrar que este modelo puede derivarse de la hipótesis de expectativas adaptables.

Una vez estudiada una serie temporal y transformada adecuadamente para reducirla a estacionariedad los principales problemas que se plantean en este tipo de análisis son la identificación de los parámetros autorregresivos, y los correspondientes a la Media Móvil, es decir averiguar que tipo de Representación básica es capaz de generar las observaciones correspondientes a nuestra variable. En segundo lugar hay que proceder a la estimación de los parámetros que definen la Representación.

Si hacemos referencia a un tercer problema asociado al diagnóstico del modelo identificado, entonces el proceso se hace iterativo puesto que a partir de esta última fase pueden sugerirse mejoras en las dos anteriores.

En todo caso el problema o fase que consideramos clave es el de la identificación. Identificación que

no tiene el significado Econométrico habitual, consistente en la estimación adecuada de los coeficientes del modelo estructural, sino en la selección de la Representación adecuada.

El procedimiento habitual de identificación consiste en el análisis comparado de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial estimadas, con las correspondientes a los modelos teóricos básicos.

Esta forma de actuar tiene problemas prácticos derivados de la arbitrariedad que incorporan a la hora de decidir si las funciones son o no nulas a partir de cierto retardo, si se atenúan oscilatoriamente o no, etc.

Muchos de estos problemas interpretativos se derivan de las especiales propiedades muestrales de las estimaciones de estas funciones.

Por otra parte es sabido que las estimaciones espectrales tienen un comportamiento más adecuado, y por tanto, pensamos intentar identificar las Representaciones en base a la comparación de los espectros teóricos de las Representaciones básicas con el estimado a partir de la serie temporal, ambos normalizados, método que por lo que hemos podido investigar no ha sido utilizado hasta la fecha.

Concretamente en el Capítulo I desarrollamos los conceptos básicos: proceso estocástico, función de autocovarianza, estacionariedad y ergodicidad que

son necesarios para el desarrollo de los siguientes capítulos.

En el Capítulo II, exponemos las dos formas básicas de descripción de una serie temporal relacionadas con los ámbitos temporal y frecuencial. También aludimos a los problemas prácticos de estimación de la función de autocorrelación y del espectro.

El Capítulo III lo dedicamos al estudio de las distintas Representaciones: Autorregresivas, Medias Móviles y Mixtas con especial referencia a la estacionariedad, invertibilidad y funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.

En este Capítulo y para cada Representación particularizaremos para las más sencillas. Por último obtenemos, también, el espectro teórico correspondiente.

El problema de la identificación se aborda en el Capítulo IV, exponiéndose en primer lugar el procedimiento habitual de Box y Jenkins y en segundo lugar el propuesto en este trabajo.

El Capítulo V, último de la primera parte, se dedica al problema de la estimación de los parámetros, poniendo especial énfasis en la estimación aproximada de los mismos.

La segunda parte consta de un sólo Capítulo, el VI, en el que abordamos, en primer lugar los estudios previos, relacionados con el tema, efectuados en nuestro país. A continuación se alude a la fuente y ámbi-

Alonso, Ródenas y Gabeiras su colaboración en la preparación de un programa de ordenador; a D. Ezequiel Uriel las facilidades que me proporcionó para el trazado automático de los gráficos del Capítulo III.

Al I.D.E. por la ayuda financiera que me permitió completar los resultados.

En otro orden de cosas, no menos importantes, D^a Rosa Barbolla me ayudó inestimablemente en la organización de la tesis y D^a M^a del Carmen Sobrado la mecanografió diligentemente.

C A P I T U L O I

En este primer capítulo introducimos los conceptos básicos tales como: proceso estocástico, media, autocovarianza, autocorrelación, estacionariedad y condiciones de ergodicidad para un proceso estocástico. Ello nos permitirá comprender el desarrollo teórico de los capítulos siguientes en los que utilizaremos, en forma sistemática, las funciones de autocovarianza y autocorrelación en procesos de covarianza estacionaria que verifiquen las condiciones de ergodicidad.

1.1) Conceptos básicos

1.1.1) Definición de proceso estocástico⁽¹⁾

En sentido amplio un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $x(e)$ que dependen del parámetro e y donde e toma valores en Θ .

Si el conjunto Θ es arbitrario, en lugar de denominarlo proceso estocástico a veces se le designa como función aleatoria o estocástica, y se reserva el término proceso estocástico para aquellos casos en los que el parámetro e puede interpretarse como la variable tiempo (t). Si por el contrario es asimilable a una variable espacial, la función suele denominarse campo aleatorio.

Nosotros trabajaremos con procesos estocásticos, dado que $e=t$ y $\Theta=\mathcal{T}$.

Es conveniente precisar la definición de proceso estocástico. Para ello, recordemos, una sucesión finita de variables aleatorias

$$x_1 \ x_2 \ \dots \dots \dots \ x_n$$

esta completamente caracterizada por la función de distribución conjunta

$$F(x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn}) = P[x_1 < x_{11} \ x_2 < x_{22} \ \dots \ x_n < x_{nn}]$$

Ahora bien, en el caso de un proceso estocástico, tratamos normalmente con infinitas variables aleatorias. Por consiguiente hay que precisar lo que entendemos por caracterizar completamente las relaciones entre las infinitas variables aleatorias que integran el proceso.

El procedimiento más simple radica en decir que el proceso estocástico $x(t)$ está determinado si están definidas todas las relaciones probabilísticas entre cada conjunto finito de valores del proceso estocástico.

$$1) \ x(t_1), x(t_2) \ \dots \dots \dots \ x(t_n)$$

$$t_i \in \mathcal{T} \quad \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \\ n=1, 2, \dots \end{array}$$

es decir si se conocen las funciones de distribución conjuntas correspondientes:

$$2) \ F_{t_1 \dots t_n}(x_{11} \dots x_{nn})$$

$$t_i \in \mathcal{T} \quad \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n \\ n=1, 2, \dots \end{array}$$

La familia de distribuciones(2) no puede ser completamente arbitraria ya que debe satisfacer las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} 3a) \ F_{t_1 \dots t_n, t_{n+1} \dots t_{n+p}}(x_{11} \ x_{22} \dots x_{nn}, \infty \dots \infty) &= \\ &= F_{t_1 \dots t_n}(x_{11} \dots x_{nn}) \end{aligned}$$

$$3b) F_{t_1 \dots t_n}(x_{11} \dots x_{nn}) = F_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(x_{i_1 1} \dots x_{i_1 n})$$

siendo $i_1 i_2 \dots i_n$ una permutación arbitraria de los índices 1, 2, ..., n.

La necesidad de estas condiciones procede de las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} F_{t_1 \dots t_n t_{n+1} \dots t_{n+p}}(x_{11} \dots x_{nn}, \infty \dots \infty) &= 1 \\ &= P[x(t_1) < x_{11} \dots x(t_n) < x_{nn} \ x(t_{n+1}) < \infty \dots x(t_{n+p}) < \infty] = \\ &= P[x(t_1) < x_{11} \dots x(t_n) < x_{nn}] = F_{t_1 t_2 \dots t_n}(x_1 x_2 \dots x_n) \\ F(x_{11} x_{22} \dots x_{nn}) &= P[x(t_1) < x_{11} \dots x(t_n) < x_{nn}] = \\ &= P[x(t_{i_1}) < x_{i_1 1} \dots x(t_{i_n}) < x_{i_1 n}] = \\ &= F_{t_{i_1} \dots t_{i_n}}(x_{i_1 1} \dots x_{i_1 n}) \end{aligned}$$

por tanto podemos definir:

"Llamamos proceso estocástico $x(t)$ a una familia de distribuciones (2) que satisfacen las condiciones de compatibilidad (3), con valores reales de t definidos sobre el conjunto \mathcal{T} (es decir $t \in \mathcal{T}$)."

Las funciones que pertenecen a la familia $F_{t_1 \dots t_n}(x_{11} \dots x_{nn})$ se denominan distribuciones de dimensión finita del proceso estocástico.

La definición que acabamos de establecer es conveniente por su sencillez y es, además, suficiente cuando estamos interesados en un conjunto finito de

valores del parámetro t (situación en la que nosotros estaremos).

Los inconvenientes que se derivan de esta definición se desprenden del hecho de que ésta no permite considerar todos los valores posibles del proceso en forma simultánea.

Para obviar esta dificultad debe utilizarse la vía de aproximación axiomática a la teoría de la probabilidad. "Introduction to the theory of Random Processes" GIKHHANW SKO ROKHD.

La definición de proceso estocástico puede ampliarse de tal forma que puedan considerarse varias de ellas en forma conjunta. Si en lugar de analizar el proceso $x(t)$ consideramos una sucesión de los mismos

$$x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_m(t)$$

podemos definir un vector $\mathbf{x}(t)$ cuyas componentes sean $x_1(t) \ \dots \ x_m(t)$.

En esta nueva situación sustituiremos (1), distribución de variables aleatorias, por la función de distribución conjunta de la sucesión de vectores

$\mathbf{x}(t_1) \ \dots \ \mathbf{x}(t_n)$, es decir por la función de mn variables

$$F_{t_1 \dots t_n}(x_{11} \dots x_{mn}) = P[x_1(t_1) < x_{11} \dots x_n(t_n) < x_{mn}]$$

Antes de continuar con nuestra exposición, es conveniente interpretar $x(t, \mathbf{y})$ para valores concretos de las variables t y \mathbf{y} (donde \mathbf{y} representa la componente aleatoria).

Si nos fijamos en $\mathcal{S} = \mathcal{S}_i$, la expresión $X(t, \mathcal{S}_i)$ expresa una función del tiempo, exclusivamente,

$$X(t, \mathcal{S}_i) = f(t)$$

apareciendo \mathcal{S} como un parámetro que, dentro de nuestra propia terminología denominamos parámetro estructural⁽²⁾ o bien como una variable exógena según sea su ámbito de variación.

Analogamente para $t=t_i$ la función $X(t_i, \mathcal{S})$ es una cantidad que depende de \mathcal{S} , es decir es una variable aleatoria.

Por último para $t=t_i$ y $\mathcal{S}=\mathcal{S}_i$ la expresión $X(t_i, \mathcal{S}_i)$ es un número. De aquí en adelante emplearemos la expresión $X(t)$ para representar al proceso estocástico, omitiendo su dependencia de \mathcal{S} , como ya hemos hecho en la definición.

Por tanto, vemos que $X(t)$ puede representar cuatro conceptos diferentes:

- una familia de funciones del tiempo (t y \mathcal{S}) variables
- una función del tiempo (t variable y \mathcal{S} fija)
- una variable aleatoria (t fija y \mathcal{S} variable)
- un número fijo (t fijo y \mathcal{S} fijo).

y precisamente esta clasificación nos es muy útil para interpretar a la serie temporal, como una realización de un proceso estocástico.

1.1.2) Media, autocovarianza y autocorrelación de un proceso estocástico.

Una vez concretado lo que entendemos por proceso estocástico, vamos a definir una serie de conceptos que

utilizaremos en lo que sigue.

a) Para procesos reales $x(t)$, podemos definir:
Media, $M_x(t)$ de $x(t)$.

$M_x(t) = E(x(t))$, que en general será una función del tiempo.

Autocovarianza⁽⁴⁾, $AUCOV x(t_1, t_2)$ de $x(t)$.

$$AUCOV_x(t_1, t_2) = E((x(t_1) - m(t_1))(x(t_2) - m(t_2)))$$

nótese que cuando no exista posibilidad de equivocación suprimiremos el subíndice, x , referente al proceso del que calculamos los estadísticos que estamos definiendo. Este convenio ya lo hemos aplicado a la definición de la autocovarianza teórica del proceso estocástico $x(t)$.

Autocorrelación⁽⁵⁾ $R_x(t_1, t_2)$ de $x(t)$.

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{AUCOV_x(t_1, t_2)}{AUCOV_x(t_1, t_2) AUCOV_x(t_2, t_2)}^{\frac{1}{2}}$$

b) Si en lugar de operar con procesos reales lo hiciéramos con procesos complejos $z(t)$, se tendrá:

Definimos $z(t)$ a partir de dos procesos reales $x(t)$ e $y(t)$ a través de:

$$z(t) = x(t) + j y(t) \text{ siendo } j = (-1)^{\frac{1}{2}}$$

Por la definición anterior vemos que $z(t)$ consiste en una familia de funciones complejas y que está, estadísticamente, determinado a partir de los procesos que lo constituyen.

Media $M_z(t)$ del proceso $x(t)$

$$M_z(t) = E\{z(t)\} = E\{x(t) + j y(t)\} = M_x(t) + j M_y(t)$$

Autocovarianza $AUCOV_z(t, t_2)$ del proceso $z(t)$.

$$AUCOV_z(t, t_2) = E\left[(z(t_1) - M_z(t_1)) \overline{(z(t_2) - M_z(t_2))}\right]$$

donde $\overline{z(t_2) - M_z(t_2)}$ representa el conjugado de $x(t_2) - M_x(t_2)$.

Autocorrelación $R_z(t_1 t_2)$ del proceso $z(t)$.

$$R_z(t_1, t_2) = \frac{AUCOV_z(t_1 t_2)}{AUCOV_z(t_1 t_2) AUCOV_z(t_2 t_2)}^{\frac{1}{2}}$$

En forma análoga podemos definir la covarianza y correlación cruzada para dos procesos $x(t)$ e $y(t)$ sean reales o complejos.

En concreto si $x(t)$ e $y(t)$ son dos P.E. la covarianza se define como:

$$COV_{x,y}(t_1 t_2) = E\left[(x(t_1) - M_x(t_1)) \overline{(y(t_2) - M_y(t_2))}\right]$$

y por tanto,

$$R_{xy}(t_1 t_2) = \frac{COV_{xy}(t_1 t_2)}{AUCOV_x(t_1 t_1) AUCOV_y(t_2 t_2)}^{\frac{1}{2}}$$

1.2) Conceptos de Estacionariedad.

El concepto de estacionariedad referido a los procesos estocásticos, es uno de los más importantes dentro del análisis de las series temporales y por ello conviene exponer las diversas definiciones del mismo.

a) Estacionariedad en sentido estricto.

Decimos que $\mathbf{X}(t)$, es estrictamente estacionario si para n, t arbitrarios y t_1, t_2, \dots, t_n tales que $t_i + t \in \mathcal{T}$ ($i=1, 2, \dots, n$) la función de distribución conjunta de la sucesión de vectores aleatorios $\mathbf{X}(t_1 + t), \mathbf{X}(t_2 + t), \dots, \mathbf{X}(t_n + t)$ es independiente de t .

Conviene señalar que dos procesos $x(t)$ e $y(t)$ componentes de $\mathbf{X}(t)$ pueden ser individualmente estacionarios pero no serlo en sentido conjunto.

El concepto de estacionariedad definido nos permite abordar el problema para procesos complejos; si denominamos nuestro proceso estocástico complejo $z(t)$, se tendrá:

$$z(t) = x(t) + j y(t)$$

Pues bien, $z(t)$ será estacionario si $x(t)$ e $y(t)$ son conjuntamente estacionarios.

De las definiciones dadas hasta ahora y relativas al concepto de estacionariedad estricta, pueden deducirse una serie de resultados⁽⁶⁾.

Si $F(x, t)$ es la función de distribución del pro

ceso estocástico, $x(t)$, y éste no es estrictamente es tacionario se tendrá:

$$F(x, t) = F(x, t + t') = F(x, t - t) = F(x)$$

y esto lleva a que:

$$M(t) = E(x(t)) = M$$

es decir, que el valor de la media es independiente del tiempo.

Además, ya hemos dicho que el proceso, $x(t)$, puede interpretarse como una familia de variables aleatorias, de aquí que la sucesión

$$x(t_1) \ x(t_2) \ \dots \ x(t_n)$$

es un vector aleatorio de n componentes cuyo comportamiento vendrá descrito por su correspondiente función de distribución n -dimensional.

Por tanto si $F(x_1 x_2 t_1 t_2)$ es la función de distribución de segundo orden, se verifica:

$$F(x_1 x_2 t_1 t_2) = F(x_1 x_2 t_1 + t', t_2 + t)$$

y por consideraciones similares a las expuestas para el caso de la media, si hacemos $t' = -t_2$

$$F(x_1 x_2 t_1 t_2) = F(x_1 x_2 t_1 - t_2)$$

y si efectuamos el cambio de variable $K = t_1 - t_2$ resulta:

$$F(x_1 x_2 t_1 t_2) = F(x_1 x_2 K)$$

En base a este resultado es evidente que la autocovarianza del proceso estocástico $x(t)$ podrá expresarse como:

$$\text{AUCOV}(t_1 t_2) = \text{AUCOV}(k)$$

Estos resultados anteriores son de capital importancia puesto que el concepto de estacionariedad estricta nos garantiza que la media del proceso no es función del tiempo y que su autocovarianza sólo depende de k , siendo ésta la diferencia entre t_1 y t_2 individualmente considerados.

b) Estacionariedad del orden l .

El concepto anteriormente expuesto de estacionariedad estricta implica que la función de densidad conjunta de las n variables $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ tiene que depender, exclusivamente, de las diferencias entre t_1, t_2, \dots, t_n pero ser independientes de estos valores considerados individualmente; es decir, las funciones de distribución son independientes de la variable t .

Esta situación puede ser excesivamente restrictiva, por lo que en ciertas circunstancias la invarianza de las funciones de distribución respecto a t suele limitarse a $l < n$.

En estas condiciones podemos definir la estacionariedad del orden l .

Un proceso estocástico $x(t)$ es estacionario de orden l si la función de distribución conjunta de orden l verifica:

$$f(x_1 x_2 \dots x_l, t_1 \dots t_l) = f(x_1 \dots x_l, t_1 + t' \dots t_l + t')$$

y esto se cumple para cualquier t' .

Como corolario tenemos que si $x(t)$ es estacionario del orden l , también lo será del orden l' tal que $l' < l$, y ello debido a que las funciones de distribución de orden l determinan las de menor orden.

c) Estacionariedad en sentido amplio.

En general, en Econometría, el análisis estadístico se limita a los momentos de primer y segundo orden y, por tanto, no parece necesario que se impongan condiciones adicionales a los momentos de orden más elevado.

El concepto de estacionariedad estricta, o el de orden l , nos ayuda en el tratamiento estadístico de las series temporales, especialmente en lo referente a inferencia, pero en Econometría nos limita innecesariamente puesto que las series a nuestra disposición reflejan, normalmente, fenómenos de naturaleza evolutiva que tras previa eliminación de la tendencia se consigue reducirla a otra estacionaria, respecto a dos características básicas como son la media y varianza⁽⁷⁾, sin que aparezca explícitamente ninguna otra restricción para los momentos de mayor orden. Por estos motivos, en Econometría, el análisis estadístico se limita a los momentos de primer y segundo orden y no impone condiciones adicionales a las de orden superior.

Por consiguiente se dice que el proceso estocástico $x(t)$ es estacionaria en sentido amplio⁽⁸⁾ si su valor medio es constante, es decir, independiente del tiempo y si su función de autocovarianza depende sólo

de la diferencia: $k=t_1-t_2$

es decir,

$$E(x(t)) = M$$

$$\text{AUCOV}(t_1, t_2) = \text{AUCOV}(k).$$

Nótese que si $x(t)$ es estacionaria de segundo orden ($l=2$), verifica las condiciones de estacionariedad en sentido amplio, pero la inversa no es generalmente cierta (estacionariedad en sentido amplio involucra, exclusivamente, los momentos de primer y segundo orden).

La mayor parte de los procesos que vamos a utilizar los supondremos Normales, y dado que una distribución Normal viene caracterizada por los momentos de 1º y 2º orden, el concepto de estacionariedad en sentido amplio, o de covarianza estacionaria implica estacionariedad estricta.

Veamos ahora otras definiciones de estacionariedad que se utilizan en la literatura especializada.

d) Estacionariedad asintótica.

$x(t)$ es estacionario en sentido asintótico, si:

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1+t', \dots, t_n+t')$$

existe y es además independiente de t' .

e) Estacionariedad en un intervalo.

$x(t)$ es estacionario en un intervalo, si se veri-

fican las condiciones de estacionariedad precisamente dentro del intervalo definido.

f) Estacionariedad periódica.

$x(t)$ es periódicamente estacionario con período T_x , si las condiciones de estacionariedad sólo son ciertas para $t' = n \cdot T_x$.

En estas circunstancias las variables aleatorias $x(b)$, $x(t+T_x)$ $x(t+nT_x)$ tienen todas la misma función de distribución.

g) Estacionariedad incremental.

Decimos que $x(t)$ es un proceso con incremento estacionario, si el proceso $y(t)=x(t+h)-x(t)$ es estacionario para todo h .

Todas las anteriores definiciones d, e, f y g, pueden ser definidas en sentido estricto, amplio o bien de orden l .

1.3) ERGODICIDAD.

1.3.1) Definiciones básicas.

La importancia y utilidad de los procesos estocásticos estacionarios es que para ellos pueden ser aplicados los teoremas ergódicos.

Si queremos definir y describir el proceso estocástico relacionado con un fenómeno que varía en el tiempo necesitamos conocer sus parámetros asociados que nos permitirán determinar las leyes de probabilidad que lo gobiernan.

Los procesos estocásticos están estrechamente relacionados con experimentos científicos y por tanto estamos interesados en poder extraer de la información contenida en la muestra (o realización del proceso estocástico) estimaciones de los parámetros. Estas muestras, como sabemos, forman secuencias en el tiempo y cuantas más tengamos, nuestras inferencias acerca de los parámetros serán, en general, más precisas.

Esto está muy bien por lo que respecta a la ingeniería y otras ciencias experimentales en las que el investigador puede definir y repetir en las mismas condiciones el fenómeno tantas veces como desee. Desgraciadamente en Economía, no podemos conseguir el control de los experimentos y tenemos que trabajar con los que nos proporciona el Sistema Económico en forma más o menos espontánea. Normalmente sólo disponemos de una observación del fenómeno y por tanto parece que la estabilidad o fiabilidad de las estimaciones está limi-

tada por la imposibilidad de repetir el experimento. Afortunadamente esto puede solventarse ya que en la medida en que se cumplan ciertas condiciones (ergodicidad) podremos obtener estimadores estadísticamente consistentes a partir de una sola serie temporal.

Siguiendo a Dhrymes⁽⁹⁾ sea $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ tal que $N = 0, 1, 2, \dots$ una sucesión de números reales.

Y sean,

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i$$

Consideremos ahora,

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k, \quad S_1 = s_0 = a_0$$

entonces $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ es la suma de las series, s ,

en el sentido de Césaró. Si S es finita la serie es convergente en el sentido de Césaró. De la definición se desprende que S puede existir aún cuando s no exista,

Por otra parte,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k a_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k = \\ &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k \end{aligned}$$

por tanto si la serie es convergente de acuerdo con

el criterio de Césaró, se verifica,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) a_k$$

puede demostrarse con facilidad que si la serie es convergente en el sentido ordinario, también es Césaró-convergente y además las dos sumas son idénticas.

Una vez introducidos los conceptos anteriores, es conveniente incorporar otra definición.

"Sea $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, $N = 0, 1, 2, \dots$ una sucesión, esta sucesión converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$; siendo a finita se dice que es Césaró-convergente en media" si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \bar{a}; \text{ siendo } \bar{a} \text{ finita.}$$

Puede comprobarse con facilidad que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ es cierta, ello implica la certeza de,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \bar{a} \text{ y además que } a = \bar{a}.$$

De la definición anterior se desprende también que una sucesión puede no ser convergente en el sentido ordinario, pero serlo en el sentido de "media de Césaró".

Por tanto, deducimos que la convergencia en sentido de media de Césaró, es un concepto relacionado con las propiedades de convergencia de las sucesiones, mientras que la convergencia en suma de Césaró está relacionada con las propiedades de convergencia de las series.

Como ya hemos apuntado, un aspecto interesante de los procesos de covarianza estacionaria, consiste en que podemos demostrar teoremas ergódicos en situaciones bastante amplias. En este contexto la ergodicidad es un concepto análogo al de consistencia en Econometría. Sin embargo, como veremos en el análisis espectral el término consistencia se define como convergencia en media cuadrática⁽¹⁰⁾.

1.3.2) Ergodicidad en procesos discretos.

Pasemos ahora a definir la ergodicidad.

Si tenemos un proceso estocástico, $x(t)$, discreto (t toma valores en $N = 0, 1, 2, \dots$).

$$E[x(t)] = M, \quad \forall t \in N$$

$$\text{La sucesión } \bar{x}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t), \quad T = 1, 2, \dots$$

se dice que es ergódica si y solo si:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\bar{x}_T - M) = \lim_{T \rightarrow \infty} E |\bar{x}_T - M|^2 = 0$$

En el caso que estemos analizando un proceso estocástico de covarianza estacionaria se puede establecer el siguiente teorema:

"Para $x(t)$ un proceso estocástico discreto de covarianza estacionaria, una condición necesaria y suficiente para que

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x(t)$$

sea ergódica, es que la sucesión de las autocovarianzas $AUCOV(k)$ converja en media de Césaró. Una condición que sólo es suficiente es:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{AUCOV}(k) = 0$$

Demostración:

$$E[\bar{x}_T] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} E(x(t)) = M$$

por tanto \bar{x}_T es un estimador insesgado de M , y la ergodicidad de \bar{x}_T se cumple si se verifica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{x}_T) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{x}_T) &= \frac{1}{T^2} E\left(\sum_{t=0}^{T-1} x(t) - M\right)^2 = \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} E[(x(t_1) - M)(x(t_2) - M)] = \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{t_1=0}^{T-1} \sum_{t_2=0}^{T-1} \text{AUCOV}(t_1, t_2) = \\ &= \frac{2}{T^2} \sum_{c=0}^T \sum_{k=0}^{t-1} \text{AUCOV}(k) - \frac{\text{AUCOV}(0)}{T} \end{aligned}$$

si ahora se define $S(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{t-1} \text{AUCOV}(k)$ el límite

de la varianza de \bar{x}_T se podrá estudiar en base al comportamiento de $S(t)$, ya que $\text{AUCOV}(0)$ es, por hipótesis finita.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Var}(\bar{x}_T) &\leq \left| \frac{2}{T^2} \sum_{t=1}^n t S(t) - \frac{\text{AUCOV}(0)}{T} \right| + \\ &+ \frac{2}{T} \sum_{t=n+1}^T \frac{t}{T} |S(t)| \end{aligned}$$

Si suponemos ahora que $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \rightarrow 0$ entonces

dado un $\varepsilon > 0$ existe un índice n tal que para todo $t > n$

$$|s(t)| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

Por tanto si n en la expresión a) verifica la condición que acabamos de enunciar (siendo $T > n$), la condición a) puede reescribirse como:

$$\text{Var}(\bar{x}_T) < \left| \frac{2}{T^2} \sum_{t=1}^n t s(t) - \frac{\text{AUCOV}(0)}{T} \right| + \left(1 - \frac{n}{T}\right) \varepsilon$$

ahora dado que n es un número fijo, se verifica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{x}_T) < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0$$

$$\text{por tanto } \lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{x}_T) = 0$$

Por otra parte la condición necesaria supone que,

$$b) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{x}_T) = 0$$

Consideremos,

$$\begin{aligned} \text{COV}[x(T-1), \bar{x}_T] &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \text{AUCOV}(T-1, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \text{AUCOV}(k) = \\ &= s(T), \end{aligned}$$

introduciendo ahora la desigualdad de Schwarz:

$$|s(T)|^2 \leq \text{var}[X(T-1)] \text{var}[(\bar{x}_T)] = \text{AUCOV}(0) \cdot \text{var}(\bar{x}_T)$$

se tiene que la condición b) implica:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{AUCOV}(k) = 0$$

y de acuerdo con la definición de $s(t)$ lo anterior

significa: $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$, lo cual a través de todo el razonamiento anterior, llevará al siguiente resultado:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var}(\bar{x}_T) = 0$$

Pueden también obtenerse los teoremas de ergodicidad para la función de autocovarianza, para procesos estocásticos de covarianza estacionaria, pero en este caso se requieren hipótesis acerca de los momentos de cuarto orden.

1.3.3) Ergodicidad en procesos continuos

En el apartado anterior nos hemos referido a la ergodicidad de los momentos de primer y segundo orden para procesos estocásticos discretos, aquí trataremos el mismo problema referido a un proceso continuo⁽¹¹⁾ y al final en base a un simple ejercicio intentaremos aclarar intuitivamente el concepto de ergodicidad.

Consideremos las siguientes medias temporales:

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$\text{AUCOV}_T(k) = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t_1) - M)(x(t_2) - M) dt$$

el error cuadrático medio de \bar{x}_T será:

$$E(\bar{x}_T - M)^2 = E\left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt - M\right)^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \text{AUCOV}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

y haciendo $k = t_1 - t_2$ resultará:

$$E(\bar{x}_T - M)^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^{T-t_2} \text{AUCOV}(k) dk dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{k}{T}\right) \text{AUCOV}(k) dk \quad (12).$$

Y si se verifica que,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T E (\bar{x}_T - M)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}(k) dk,$$

se tendrá que, para T suficientemente grande el error cuadrático medio será:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \text{AUCOV}(k) dk.$$

En estas circunstancias \bar{x}_T converge hacia M en sentido cuadrático medio, lo cual implica a su vez convergencia en probabilidad, es decir \bar{x}_T es un estimador consistente de M .

Este hecho es de gran importancia pues demuestra que conseguimos la convergencia mediante una sola serie temporal, es decir con una sola observación del proceso.

Siempre que se verifique que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T \text{AUCOV}(k) dk = 0$$

diremos que el proceso $x(t)$ es ergódico en media.

Por lo que respecta a la función de autocovarianza muestral se puede demostrar⁽¹³⁾ que si se verifica:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(x(t_2+k+V) x(t_2+k) - \text{AUCOV}(V) - M^2).$$

$$\cdot (x(t_2+V) x(t_2) - \text{AUCOV}(V) - M^2) dk = 0.$$

También se cumple que el promedio temporal $AUCOV(k)$ definido en la página anterior, converge en media cuadrática, y por tanto en probabilidad, hacia $AUCOV(k)$. En estas condiciones $AUCOV(k)$ es un estimador consistente de $AUCOV(k)$.

Es conveniente, llegados a este punto, clarificar algo más estos conceptos de covarianza estacionaria y ergodicidad referidos a procesos Normales.

Sea $x(t) = a \cos Wt + b \sin Wt$, donde a y b son variables aleatorias Normales distribuidas en forma independiente, con media cero y varianza común igual a σ^2 , es decir:

$$\begin{aligned} E(a) &= E(b) = 0 \\ \text{var}(a) &= \text{var}(b) = \sigma^2 \\ \text{COV}(a, b) &= 0 \end{aligned}$$

Calcularemos ahora la autocovarianza de $x(t)$.

$$\begin{aligned} E(x(t)) &= E(a \cos Wt + b \sin Wt) = 0 \\ E(x(t_1) x(t_2)) &= E[(a \cos Wt_1 + b \sin Wt_1)(a \cos Wt_2 + b \sin Wt_2)] \\ &= E[a^2 \cos Wt_1 \cos Wt_2 + b^2 \sin Wt_1 \sin Wt_2 + \\ &\quad + ab \cos Wt_1 \sin Wt_2 + ab \sin Wt_1 \cos Wt_2] \\ &= \sigma^2 \cos Wt_1 \cos Wt_2 + \sigma^2 \sin Wt_1 \sin Wt_2 = \\ &= \sigma^2 \cos(Wt_1 - Wt_2) = \sigma^2 \cos W(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

y como $t_1 - t_2 = k$, tendremos:

$$E[x(t_1) x(t_2)] = \sigma^2 \cos Wk, \text{ es decir, } AUCOV(k) = \sigma^2 \cos Wk.$$

Ahora bien, en el caso de que se trate de un proceso Normal las condiciones de ergodicidad, antes expuestas, se reducen a:

$$\text{para la media: } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \text{AUCOV}(k) dk = 0$$

para la autocovarianza:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\text{AUCOV}(k))^2 dk = 0$$

Pues bien, para el proceso $x(t)$ que estamos analizando, estas condiciones vienen dadas por:

Para la media:

$$A(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \text{AUCOV}(k) dk = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 \cos Wk dk = \frac{\sigma^2 \text{sen } WT}{WT}$$

Para la autocovarianza:

$$\begin{aligned} B(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T (\text{AUCOV}(k))^2 dk = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 \cos Wk dk = \\ &= \sigma^4 \frac{1}{2} + \frac{\text{sen } 2WT}{4WT} \end{aligned}$$

pero si tomamos los límites,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^2 \frac{\text{sen } WT}{WT} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} B(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{sen } 2WT}{4WT} \right) \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2} \neq 0$$

Por consiguiente el proceso $x(t)$ es ergódico

respecto de su valor medio pero no lo es en relación a la autocovarianza.

El ejemplo propuesto sirve para dar luz acerca del concepto de ergodicidad, desde un punto de vista intuitivo. Para el proceso que estudiamos existe un alto grado de dependencia para elementos de la serie temporal que están alejados en el tiempo, en particular las observaciones correspondientes a valores que distan $2\sqrt{f}$, tienen una correlación perfecta. De este hecho deriva la causa fundamental de la no ergodicidad, puesto que no puede obtenerse información adicional acerca de la función de autocovarianza a medida que T aumenta.

Si la función de autocovarianza de un proceso de covarianza estacionaria verifica que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{AUCOV}(k) = 0$$

la autocovarianza se debilita a medida que k aumenta. Un proceso Normal que verifique la propiedad anterior presenta independencia entre las observaciones del mismo suficientemente alejadas, por tanto al ampliar el ámbito temporal de la muestra obtenemos mayor información del proceso ⁽¹⁴⁾.

C A P I T U L O I I

2.1) Descripción de una serie temporal en el ámbito del tiempo.

Historicamente el análisis de series temporales, en el ámbito del tiempo, fué la primera vía de aproximación estadística al análisis de estas series y fué una extensión de la teoría clásica de la correlación. En la actualidad existe otra posibilidad de análisis de las series temporales basada en el estudio frecuencial de las mismas.

En esta primera parte del capítulo expondré los problemas básicos asociados a la estimación de las funciones de autocovarianza y autocorrelación que aparecen al analizar las series en el ámbito del tiempo y, en la segunda, las asociadas a la estimación espectral.

2.2) Estimación de las funciones de autocovarianza y autocorrelación.

Una vez vista la importancia de las propiedades ergódicas que nos permitieran trabajar con las series temporales obtenidas de la realización de un proceso estocástico, es conveniente que nos refiramos a los problemas específicos relacionados con la estimación de las funciones de autocovarianza y autocorrelación a partir de los datos proporcionados por la serie temporal.

Ya hemos definido y utilizado los conceptos de

autocovarianza y autocorrelación. Específicamente la representación gráfica $(k, \text{AUCOV}(k))$ recibe el nombre de función de autocovarianza. Análogamente $(K, R(K))$ es la función de autocorrelación.

En el pasado la función de autocorrelación se ha denominado, también, correlograma. Esta denominación de correlograma la utilizamos profusamente en esta tesis como sinónimo de la función de autocorrelación.

Recalquemos que gracias al proceso de normalización, la función de autocorrelación es adimensional.

La función de autocorrelación es simétrica con relación a K , este hecho simplifica notablemente el cálculo del mismo. Esta propiedad puede demostrarse con gran facilidad.

$$\text{AUCOV}(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - M_1)(x(t_2) - M_2)]$$

y si el proceso es de covarianza estacionaria,

$$\text{AUCOV}(t_1, t_2) = \text{AUCOV}(K) = E[(x(t_1) - M)(x(t_2) - M)]$$

por tanto,

$$\text{AUCOV}(-K) = E[(x(-t_1) - M)(x(-t_2) - M)]$$

y como dadas las condiciones de estacionariedad esta propiedad independiente del origen del eje t , se tiene:

$$\text{AUCOV}(-K) = \text{AUCOV}(K)$$

si normalizamos,

$$R(-K) = \frac{\text{AUCOV}(-K)}{\text{AUCOV}(0)} = \frac{\text{AUCOV}(K)}{\text{AUCOV}(0)} = R(K).$$

Explicitemos ya la forma de obtener las autocovarianzas, o su versión normalizada a través de las autocorrelaciones.

En situaciones prácticas nos encontramos con un conjunto de N observaciones a partir de las que deben obtenerse las estimaciones correspondientes.

El problema de la estimación de la autocovarianza a partir de los datos de la muestra no tiene solución única y depende de la utilización que vayamos a darle al estimador.

Las propiedades de los distintos estimadores pueden encontrarse en Jenkins y Watts⁽¹⁾, pero aquí seguiremos a Fishman⁽²⁾.

Supongamos que las N observaciones han sido realizadas a intervalos, Δt , que tomaremos como unitarios y, llamemos T al intervalo total. En estas condiciones el estimador de la autocovarianza, $AUCOV(K)$, más utilizado es:⁽³⁾

$$aucov(k) = \frac{1}{H} \sum_{t=1}^{N-K} x_t x_{t+k}$$

donde para simplificar hemos supuesto que la media, M , del proceso $\bar{x}(t)$, es igual a cero, y H es un divisor a especificar por el investigador, que puede tomar como valores (N) y $(N-K)$.

Siempre que empleemos como divisor la cantidad $(N-K)$ nos proporcionará un estimador insesgado, mientras que si se emplea como divisor (N) aparece un sesgo negativo dado por la siguiente expresión:

$$E[\text{aucov}(k) - \text{AUCOV}(K)] = -K \frac{\text{AUCOV}(K)}{N}$$

Parzen⁽⁴⁾ hace referencia a que muchos autores utilizan el estimador insesgado, pero que para él, el sesgado presenta dos ventajas:

- a) es una función definida positiva, lo cual no sucede con el estimador insesgado.
- b) el error cuadrático medio del estimador sesgado es, en general, menor que el del estimador insesgado.

La propiedad a) tiene una gran importancia en la estimación del espectro por proporcionar estimaciones positivas, mientras que las que se obtienen mediante el estimador insesgado no garantizan siempre esa propiedad.

En general lo que puede decirse es que a nosotros la diferencia entre uno y otro estimador no nos va a afectar en gran medida salvo lo ya dicho para la estimación del espectro, y ello motivado por el hecho de que cuando N es grande, y K es pequeño en relación a él (y nosotros estaremos interesados, normalmente en valores de K que serán menores que $\frac{1}{3}N$ ⁽⁵⁾, la diferencia entre N^{-1} y $(N-K)^{-1}$ afecta mínimamente.

Por las razones anteriormente apuntadas parece aconsejable utilizar en nuestro estudio, salvo que explícitamente lo advirtamos, el estimador sesgado.

Pero las variantes a la hora de seleccionar el estimador no terminan aquí. Así Nerlove⁽⁶⁾ cuando realiza la descripción de la serie temporal en el

ámbito del tiempo introduce como estimador de la autocovarianza:

$$\text{aucov}(k) = \frac{1}{2N} \sum_{t=N+M}^{N-M} [x(t-k) x(t) + x(t) x(t+k)]$$

(siendo M el mayor retardo correspondiente a la autocovarianza calculada).

Este estimador, Nerlove, lo atribuyé a Parzen y gracias a él se evitan una serie de consecuencias molestas en la estimación del espectro. Numera las observaciones de $-N$ hasta $+N$, en lugar de 0 a N así como utilizar retardos positivos y negativos, para facilitar su comparación con las definiciones de covarianzas cruzadas retardadas.

En todo caso conviene aclarar que a pesar del denominador que empleemos la estimación de la autocovarianza, ésta será consistente.

Hasta aquí hemos supuesto que el proceso $x(t)$ tiene una media igual a cero, pero éste no es el caso normal en la mayoría de las series temporales que nos provienen del ámbito económico, piénsese para ello que la mayor parte de las variables económicas están relacionadas con el crecimiento demográfico, la renta nacional, el stock de dinero u oferta monetaria (medida ésta ya sea a través de M_1 o M_2 , etc.) y al estar sujetas a tendencias evolutivas, es lógico pensar que éstas también afectarán al resto de las variables económicas. De ello se deduce la necesidad de tener en cuenta valores de la media diferentes de cero.

En estas condiciones se presenta un nuevo problema que se deriva de la elección del estimador de la media, lo cual se resuelve normalmente a través del convenio:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t$$

por tanto el estimador de la función de autocovarianza será:

$$\text{aucov}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-K} (x_t - m)(x_{t+K} - m)$$

No obstante en muchos casos se prefiere utilizar como estimador de la función de autocovarianza sobre todo cuando la serie es corta y cuando los extremos de la serie son apreciablemente mayores o menores que la media, el siguiente estimador:

$$\text{aucov}(k) = \frac{1}{N} \left[\sum_{t=1}^{N-K} x_t x_{t+k} - (N-K) \sum_{t=1}^{N-K} x_t \sum_{t=1}^{N-K} x_{t+k} \right]$$

Nosotros emplearemos series lo suficientemente largas como para que influya poco cual de los estimadores empleamos, por tanto, utilizaremos como estimador de la autocovarianza:

$$\text{aucov}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-K} (x_t - m)(x_{t+k} - m)$$

A partir de esta última expresión calculemos el sesgo en la estimación de la autocovarianza, AUCOV(K), a través del estimador propuesto. Este sesgo resul-

tará ser siempre negativo y con la misma forma, independientemente de la elección del estimador de la media del proceso $x(t)$.

$$E(\text{aucov}(k)) = \frac{1}{N} (N-K) \text{AUCOV}(K) + \\ + \frac{N-K}{N^2} \sum_{t=1}^N \sum_{s=1}^N \text{AUCOV}(t-s) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-K} \sum_{s=1}^N \text{AUCOV}(t-s) + \\ + \text{AUCOV}(t+k-s)$$

simplificando la expresión anterior llegamos a:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N E(\text{aucov}(K) - \text{AUCOV}(K)) = -(K \text{AUCOV}(K) + \\ + \sum_{V=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}(V) = -[K \text{AUCOV}(K) + 2\pi g(0)] \quad (7)$$

y cuando N sea mucho mayor que K , el primer término del sesgo asintótico $-\frac{K \text{AUCOV}(K)}{N}$ es despreciable

comparado con el segundo término $2\pi g(0)$.

Por consiguiente para valores de N suficientemente grandes $E[\text{aucov}(k) - \text{AUCOV}(K)] \rightarrow \frac{2\pi g(0)}{N}$

sesgo que es negativo y que tiene la misma forma con independencia de la elección del estimador de la media incorporado para estimar la autocovarianza muestral.

Una vez que hemos evidenciado el sesgo que aparece simplificaremos al suponer que la media del proceso es nula para todos los cálculos siguientes.

Es conveniente, ahora, calcular la covarianza

que se presenta entre dos estimaciones de la autocovarianza, $\text{aucov}(k)$ y $\text{aucov}(u)$.

$$\text{cov}(\text{aucov}(k), \text{aucov}(u)) = \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^{N-K} \sum_{s=1}^{N-U} \text{cov}.$$

$$\begin{aligned} \cdot (x_t \ x_{t+k} \ x_s \ x_{s+u}) &= \frac{1}{N^2} \sum_{t=1}^{N-K} \sum_{s=1}^{N-U} (\text{AUCOV}(t-s) \text{AUCOV}(t-s+k-U) + \\ &+ \text{AUCOV}(t-s-u) \text{AUCOV}(t-s+k) + h_{s-t,k,u}). \end{aligned}$$

siendo $h_{s-t,k,u}$ un cumulante de cuarto orden definido como:

$$h_{s-t,k,u} = h \sum_{i=0}^{\infty} a_i a_{i+k} a_{i-t+s} a_{i-t+s+u},$$

habiendo admitido como posible la representación del proceso $x(t)$ en base a una media móvil⁽⁸⁾,

$$x_t = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \varepsilon_{t-s}$$

y donde,

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0; \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = \begin{cases} 1, & s=0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$E(\varepsilon_t^4) = h+3 < \infty$$

En estas condiciones la covarianza asintótica nos es dada por:

$$\begin{aligned} \text{COV}(\text{aucov}(k), \text{aucov}(u)) &\rightarrow \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}(r) \text{AUCOV}(r+j-u) + \\ &+ \text{AUCOV}(j+k) \text{AUCOV}(r-u) + h \text{AUCOV}(K) \text{AUCOV}(U) \end{aligned}$$

donde $r = -(N-u-1)$.

Mediante la última expresión podemos calcular, directamente la varianza de $\text{aucov}(k)$,

$$\begin{aligned} \text{var}(\text{aucov}(k)) \rightarrow & \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\text{AUCOV}^2(r) + \\ & + \text{AUCOV}(r+K) \text{AUCOV}(r-K) + k \text{AUCOV}^2(K)) \end{aligned}$$

De los resultados anteriores deducimos que las estimaciones de las autocovarianzas están correlacionadas. Cualquier variación muestral no especificada ejerce por tanto su influencia sobre todas las demás.

Para valores de K suficientemente grandes la última expresión obtenida se reduce a:

$$\text{var}(\text{aucov}(k)) \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}^2(r)$$

lo cual quiere decir que dentro de un grado razonable de aproximación la magnitud de las fluctuaciones muestrales para un K dado no está relacionado con el valor de $\text{AUCOV}(K)$.

En el análisis de la correlación la inferencia estadística se basa en el correlograma,

$$R(k) = \frac{\text{AUCOV}(K)}{\text{AUCOV}(0)}.$$

Desarrollando por Taylor se tiene:

$$E(r(K)) = \frac{E(\text{aucov}(k))}{E(\text{aucov}(0))} - \frac{\text{cov}(\text{aucov}(k), \text{aucov}(0))}{E(\text{aucov}(0))^2} +$$

$$+ \frac{E(\text{aucov}(k)) \text{var}(\text{aucov}(k))}{E(\text{aucov}(o))^2}$$

y vemos que $r(k)$ es un estimador sesgado del coeficiente de autocorrelación $R(K)$. El sesgo proviene de cuatro fuentes:

- proveniente del estimador cociente
- originada por el divisor del estimador
- originada por el estimador de la media
- originada por la correlación inherente entre el numerador y denominador en el estimador cociente.

Continuando con nuestra exposición, si la variación de $\text{aucov}(k)$ alrededor de $\text{AUCOV}(K)$ es lo suficientemente pequeña, y si nos fijamos en los términos de orden N^{-1} tendremos:

$$\begin{aligned} \text{COV}(r(k) \ r(u)) &= \frac{\text{COV}(\text{aucov}(k) \ \text{aucov}(u))}{E(\text{aucov}(o))^2} - \\ &- \frac{E \text{aucov}(k) \ \text{cov}(\text{aucov}(r) \ \text{aucov}(o))}{(E \text{aucov}(o))^4} = \\ &= \frac{E \text{aucov}(u) \ \text{cov}(\text{aucov}(k) \ \text{aucov}(o))}{(E(\text{aucov}(o)))^3} + \\ &+ \frac{E(\text{aucov}(k) \ E(\text{aucov}(u) \ \text{var}(\text{aucov}(o)))}{(E(\text{aucov}(o)))^4} \end{aligned}$$

y para valores de N suficientemente grandes, podemos aproximar la expresión anterior por:

$$\text{cov}(r(k) \ r(u)) \simeq \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (R(r) \ R(r+K-u) + R(r+K) \ R(r-u) -$$

$$- 2 R(K) R(r+u) + R(u) R(r) + R(r+K) -$$

$- R(k) R(u) R(r)^2$) y si $R(K)=0$ para K mayor que un cierto índice q la expresión anterior se reduce a:

$$a) \text{ COV } r(k), r(u) = \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R(r) R(r+u-k),$$

y análogamente,⁽⁹⁾

$$\text{var } R(k) \simeq \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} [R(r)^2 + R(r+k) R(r-k) -$$

$$- 2 (2R(k) R(r) R(r+k) - R(k)^2 R(r)^2)]$$

Introduciendo de nuevo la condición anterior de que $R(K)=0$ para K mayor que q tendremos:

$$b) \text{ var } R(k) \simeq \frac{1}{N} (1 + 2 \sum_{r=1}^q R(r)^2).$$

Las expresiones a) y b) obtenidas anteriormente nos van a ser de gran utilidad puesto que en las aplicaciones que hagamos con las series temporales, necesitaremos calcular la estimación del error con el que calculamos la función de autocorrelación para tener una medida de confianza relacionada a estas estimaciones, y dado que, en los modelos de representación que emplearemos se verifica la restricción técnica de que a partir de determinado K los coeficientes de autocorrelación se anulan, las expresiones aproximadas obtenidas anteriormente nos serán de gran utilidad.

3.- Análisis frecuencial de las series temporales

Desde hace algunos años las técnicas de análisis espectral se han difundido ampliamente hasta el punto de llegar a ser uno de los instrumentos de análisis estadístico más útil en el campo de las ciencias físicas, pero en el nuestro, la Econometría, no existe un gran acuerdo respecto a su utilidad y ello motivado por dos hechos básicos. En el primero se hace referencia a que toda la información obtenida a través del espectro puede ser también derivada del análisis de las autocorrelaciones en el ámbito temporal y viceversa⁽¹⁰⁾. En segundo lugar nos interesa efectuar previsiones, y al realizarse en el tiempo parece natural analizar la serie temporal en ese mismo ámbito.

En general se admite⁽¹¹⁾ que la elección entre el análisis de la serie temporal a través de las autocorrelaciones o el espectro se debe fundamentar en:

- el uso que se vaya a hacer de las cantidades estimadas.
- facilidad de interpretación.
- simplicidad de las propiedades muestrales.

Insistamos algo más en el aspecto interpretativo. En muchos casos nos interesará ver la forma en que determinado modelo describe la realidad, por tanto el análisis espectral será de gran utilidad. La secuencia lógica consistirá en obtener las estimaciones del espectro a partir de los datos disponibles, y a continuación se identificarán los picos

del espectro con determinados comportamientos reales de la variable económica a estudiar. En caso de que esta identificación, a través de la interpretación, no sea posible nos llevará a conceder gran importancia a las estimaciones espectrales realizadas, puesto que éstas podrán ser erróneas debido a fenómenos de variaciones aleatorias, Leakage, etc.

Relacionado con lo anterior está el problema de hasta que punto servirá el análisis espectral puesto que si va a decirnos lo que sabemos, no podrá ser de gran ayuda. Esto no debe interpretarse en forma tan restringida puesto que el análisis espectral puede ayudar a que nos fijemos en determinados aspectos del comportamiento de la variable bajo estudio, aspectos que de no haber realizado este análisis nos hubieran pasado desapercibidos.

2.3.1) Fundamentos del análisis frecuencial

Dejando aparte el concepto de frecuencia designada por f y definida como la inversa del período de la oscilación o bien la frecuencia angular definida como la anterior multiplicada por el factor 2, y que nosotros hemos representado por w es conveniente explicitar en base a que supuestos y de que manera es posible describir un proceso estocástico por su contenido de frecuencias.

Sea $x(t)$ una función no aleatoria⁽¹²⁾ tal que $x(t) = a \sin wt$. Esta función está definida por completo, con excepción de su fase, a través del par (A, W) donde A es la amplitud y W la frecuencia angular.

Otra forma alternativa de descripción de $x(t)$ es a través de la expresión siguiente:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+k) dt = \frac{A^2}{2} \cos WK \quad (13)$$

que es análoga a la función de autocovarianza, aunque aquí no es correcta la denominación puesto que estamos operando con una función no estocástica.

De las dos descripciones de $x(t)$, la expresada a través del par (A, W) es la más sencilla y de aquí surge la pregunta ¿es posible describir funciones estocásticas temporales a través de las amplitudes y frecuencias que lo integran?. La respuesta es afirmativa.

Supongamos ahora que $x(t)$ es un proceso estocástico estacionario y Normal tal que su media es cero. En estas circunstancias, la función de autocovarianza define completamente al proceso.

Concretamente supongamos que el proceso viene de finido por:

$$1) \quad x(t) = \sum_{i=1}^N (a_i \cos W_i t + b_i \sin W_i t)$$

siendo

$$0 \leq W_1 < W_2 < \dots < W_N$$

y a_i y b_i variables aleatorias Normales tales que:

$$E(a_i) = E(b_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$E(a_i a_k) = E(b_i b_k) = 0 \quad i \neq j$$

$$i = j$$

$$E(a_i b_k) = 0 \quad i = (1, \dots, N) \quad (j = 1, \dots, N)$$

Por tanto 1) es un proceso Normal de media nula. Comprobemos ahora la estacionariedad del proceso en el sentido de la covarianza. Para ello veremos que ésta es independiente de t .

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) &= E x(t) x(t+k) = \\ &= E \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \cos W_i t \cos W_j (t+k) + \right. \\ &\quad + a_i b_j \cos W_i t \sin W_j (t+k) + a_j b_i \cos W_j (t+k) \sin W_i t + \\ &\quad \left. + b_i b_j \sin W_i t \sin W_j (t+k) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\cos W_i t \cos W_i (t+k) + \sin W_i t \sin W_i (t+k)), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\text{AUCOV}(K) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \cos W_i K$$

con lo que vemos que el proceso $x(t)$ es de covarianza estacionaria.

La representación gráfica de la función de autocovarianza, o bien de la función de autocorrelación, en función del retardo, es un elemento importante en el análisis del proceso $x(t)$ en el ámbito temporal, mientras que la representación gráfica de los puntos (σ_i^2, W_i) será el instrumento clave en el análisis frecuencial de $x(t)$.

Vamos a especificar más detalladamente el concepto anterior.

Si en la expresión de la autocovarianza del proceso $x(t)$ hacemos $K=0$, tendremos como expresión de la varianza del proceso:

$$\text{var } x(t) = \text{AUCOV}(0) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

Esta última expresión permite recalcar la aditividad de los componentes de varianza y la ausencia de covarianza y aísla la importancia relativa de cada componente periódica en la variación medio cuadrática. Además, la ortogonalidad de los componentes permite considerar la variación medio cuadrática como generada por frecuentes independientes. Este hecho es importante puesto que nos permite ver como para un proceso $x(t)$, que presenta autocorrelación en el tiempo, puede descomponerse en sus contribuciones aditivas a través del análisis de su varianza.

Si modificamos la expresión anterior, normalizandola tendremos:

$$1 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 / \text{AUCOV}(0)$$

con lo que si una σ_j^2 es elevada, esta componente influirá en forma significativa en la forma del proceso $x(t)$.

2.3.2) Espectro de un proceso $x(t)$

El proceso que hemos utilizado en el apartado 2.3.1) era de características muy particulares, ahora veremos como es posible generalizar el resultado anterior para un proceso de covarianza estacionaria cualquiera. Para ello procederemos en dos etapas. En la primera supondremos que el proceso es Normal y en la segunda levantaremos esta restricción.

Si $x(t)$ es un proceso Normal de covarianza estacionaria, puede demostrarse que⁽¹⁴⁾ puede expresarse como:

$$x(t) = \int_0^{\infty} \cos Wt \, du(W) + \int_0^{\infty} \sin Wt \, dv(W)$$

donde las integrales están definidas en el sentido de stieltjes. La razón para emplear estas integrales está relacionada con la posibilidad de existencia de un número finito de discontinuidades, que en el análisis espectral pueden aparecer si el proceso, $x(t)$, presenta periodicidades exactas.

Las variables $du(W)$ y $dv(W)$ son variables aleatorias con una serie de propiedades que pasamos a obtener.

En primer lugar calculemos la función de autocovarianza e impongamos la condición de estacionariedad.

$$\text{AUCOV}(K) = E[x(t) x(t+k)]$$

(obsérvese que continuamos suponiendo que la media es nula).

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) &= E\left(\int_0^{\infty} \cos Wt \, du(W) + \sin Wt \, dv(W) + \int_0^{\infty} \cos W'(t+k) \, du(W') + \right. \\ &\quad \left. + \sin W'(t+k) \, dv(W')\right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos Wt \cos W'(t+k) E(du(W) du(W')) + \\ &\quad + \sin Wt \cos W'(t+k) E(dv(W) dv(W')) + \\ &\quad + \sin Wt \sin W'(t+k) E(dv(W) du(W')) + \\ &\quad + \sin W'(t+k) \cos Wt E(du(W') dv(W)) + \\ &\quad + \sin W'(t+k) \sin Wt E(dv(W') dv(W)) \end{aligned}$$

$$+ \cos W t \sin W' (t+k) E(du(W) dv(W')),$$

si hacemos $W=W'$ la expresión subintegral se nos convertirá en:

$$\begin{aligned} & \cos W t \cos W (t+k) E(du(W))^2 + \\ & + \sin W t \sin W (t+k) E(dv(W))^2 + \\ & + \sin W t \cos W (t+k) E(dv(W) du(W)) + \\ & + \cos W t \sin W (t+k) E(du(W) dv(W)) \end{aligned}$$

y en estas condiciones la única forma en la que el proceso será estacionario, es decir, función de K será:

$$\begin{aligned} E(du(W))^2 &= E(dv(W))^2 = 2 dG(W) \\ E(du(W) dv(W)) &= 0 \end{aligned}$$

ya que en este caso los dos primeros sumandos se reducen a:

$$\cos W k (2 dG(W)), \text{ que como vemos es sólo función de } K.$$

También, para que se verifique la condición de estacionariedad se requerirá que si $W \neq W'$, se anulen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} E(du(W') du(W)) &= E(dv(W') dv(W)) = E(du(W') dv(W)) = \\ &= E(du(W) dv(W')) = 0. \end{aligned}$$

Si lo anterior no se cumple aparecerán términos que no serán función de K , únicamente.

Por tanto el requisito de estacionariedad impone las siguientes restricciones a las variables aleatorias $du(W)$ y $dv(W)$,

$$\begin{aligned}
 E(du(W) du(W')) &= E(dv(W) dv(W')) = 2 dG(W) \text{ si } W=W' \\
 E(du(W) du(W')) &= E(dv(W) dv(W')) = 0 \quad \text{si } W \neq W' \\
 E(du(W) dv(W')) &= 0 \quad \text{para toda } W = W'
 \end{aligned}$$

La función $G(W)$ recibe el nombre de espectro de acumulación.

Antes de pasar a analizar $G(W)$, es conveniente terminar con las propiedades de las variables aleatorias $du(W)$ y $dv(W)$.

Si tenemos $u(W)$ y dos intervalos cerrados de frecuencias (W_1, W_2) (W_3, W_4) , careciendo estos dos intervalos de elementos comunes, tal que

$$E[(u(W_1) - u(W_2))(u(W_3) - u(W_4))] = 0$$

diremos que $u(W)$ presenta incrementos sin elementos comunes y de correlación nula, o bien que es ortogonal. A medida que los intervalos se hacen infinitesimales, a través de un análisis en el límite, se pueden reemplazar $u(W_i) - u(W_{i+1})$ y $v(W_i) - v(W_{i+1})$ por $du(W_i)$ y $dv(W_i)$ respectivamente, y nótese, que si u y v son ortogonales ello comporta que el proceso $x(t)$, es de covarianza estacionaria.

Analizaremos, a continuación, las propiedades de $G(W)$.

$G(W)$, es una función monótona creciente y puede descomponerse en tres componentes de acuerdo con la expresión:

$$G(W) = G_1(W) + G_2(W) + G_3(W)$$

siendo $G_1(W)$, $G_2(W)$ y $G_3(W)$ funciones no decrecientes con la frecuencia y tales que:

$G_1(W)$ es una función absolutamente continua⁽¹⁵⁾ con derivada $g(W) = \frac{dG_1(W)}{dW}$, esta derivada recibe el nom-

bre de espectro.

$G_2(W)$, es una función compuesta de un número finito de saltos o escalones. Cada salto significa la existencia de una componente estrictamente periódica y por consiguiente es muy improbable su presencia en el espectro de las series económicas dado que éstas no evidencian periodicidades exactas.

$G_3(W)$, es la componente singular continua de $G(W)$ y carece de significación práctica.

Por consiguiente en los espectros de las variables económicas $G(W) = G_1(W)$.

Es conveniente escribir $x(t)$, a través de su descomposición espectral en forma más compacta, para ello recordemos que:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

en estas condiciones $x(t) = \int_0^\infty \cos \omega t \, d\mu(\omega) + \sin \omega t \, d\nu(\omega)$, puede escribirse como:

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} du(W) - j dv(W) + \\ + e^{-j\omega t} du(W) + j dv(W)$$

siendo,

$$du(W) = du(-W)$$

$$dv(W) = -dv(-W)$$

por tanto,

$$x(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} du(W) - j dv(W)$$

y si hacemos

$$dz(W) = \frac{1}{2} du(W) - j dv(W)$$

tendremos

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dz(W)$$

y definiendo

$$dz(W) = \frac{1}{2} du(W) + j dv(W)$$

se verifica

$$E(dz(W) dz(W')) = \begin{matrix} dG(W) & \text{si } W = -W' \\ 0 & \text{si } W \neq -W' \end{matrix}$$

$$E(dz(W) dz(W')) = \begin{matrix} dG(W) & \text{si } W = W' \\ 0 & \text{si } W \neq W' \end{matrix}$$

Es fácil ahora ver porque hemos expresado $x(t)$

a través de su descomposición espectral mediante una notación más compacta.

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) &= E(x(t) x(t+k)) = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} e^{j(Wt+W'(t+k))} E(dz(W) dz(W')) \end{aligned}$$

que de acuerdo con las propiedades especificadas más arriba nos dará:

$$\text{AUCOV}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jWk} dG(W).$$

Nótese que si en lugar de trabajar con la función de autocovarianza, lo hicieramos con la función de auto correlación, se tendría:

$$R(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jWk} dF(W);$$

donde

$$dF(W) \stackrel{(16)}{=} \frac{dG(W)}{\text{AUCOV}(0)} \quad \text{verificado } F(-\infty)=0 \quad F(\infty)=1$$

por consiguiente $F(W)$ recibe el nombre de Función de Distribución Espectral (por su similaridad con una fun ción de distribución).

Hagamos ahora la interpretación del espectro en función de las contribuciones a la varianza del proceso tal como lo hemos hecho para 2.3.1.

Como caso particular de las expresiones anteriores, si $K=0$ se tendrá:

$$\text{var } x(t) = \text{AUCOV}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dG(W)$$

con lo que vemos, una vez más, que la varianza total del proceso es la suma de las contribuciones elementales de varianza de los componentes que lo integran.

2.3.3) Dualidad entre el espectro y la función de autocovarianza⁽¹⁷⁾

Sea $y(t)$ una función periódica no sinusoidal de período T , sabemos que ésta puede desarrollarse en serie de Fourier⁽¹⁸⁾ de acuerdo con la siguiente expresión:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

siendo ω la frecuencia o velocidad angular

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt$$

o bien haciendo uso de la relación de Euler

$$e^{jn\omega t} = \cos n\omega t + j \sin n\omega t$$

el desarrollo en serie puede reescribirse en forma más compacta como:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega t}$$

$$\text{siendo } a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-jn\omega t} dt$$

o bien

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-j \frac{2\pi n}{T} t} dt$$

es decir,

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(u) e^{-j \frac{2\pi n}{T} (t-u)} du$$

(habiendo sustituido t por u para evitar confusión).

Si definimos $\Delta S = \frac{1}{T}$ y consideramos que $T \rightarrow \infty$, lo cual equivale a decir que $y(t)$ no tiene período, tenemos:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta S \int_{-T/2}^{T/2} y(u) e^{2\pi n j (t-u) \Delta S} du$$

y como por definición de integral definida se tiene que:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} f(n \Delta S) \Delta S = \int_0^{\infty} f(s) ds$$

tendremos,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta S \int_{-T/2}^{T/2} y(u) e^{2\pi n j (t-u) \Delta S} du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{2\pi n j (t-u)} du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j s t} ds \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-2\pi j s u} du \end{aligned}$$

o sea,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi jst} ds \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-2\pi jsu} du$$

y por otra parte dado el significado de $s^{(19)}$ como la frecuencia, $\frac{W}{2\pi}$, se tendrá al sustituir:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j\omega u} du$$

Esta última expresión recibe el nombre de integral de Fourier y representa la extensión del desarrollo en serie de Fourier a una función no periódica.

La función $S(W) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) e^{-j\omega u} du$, nos da el espectro⁽²⁰⁾ de la función $y(t)$ ⁽²¹⁾, y nótese que las funciones

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(W) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{o bien} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(22)

$$S(W) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad S(W) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

son dos funciones asociadas ya que forman un par de transformadas de Fourier (véase el Apéndice nº 1) y toda la información que nos proporcione una también nos la proporciona la otra.

La demostración que se ha efectuado para funciones continuas, es ampliable a situaciones discretas puesto que puede demostrarse que el par de transformadas serán en este caso⁽²³⁾:

$$S(W) = \Delta \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} y(t) e^{-j\omega t \Delta} \quad -\frac{\pi}{\Delta} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} S(W) e^{j\omega t} d\omega \quad ; \quad -N\Delta \leq t \leq N\Delta$$

siendo Δ la diferencia entre dos intervalos sucesivos en los que $y(t)$ está definido⁽²⁴⁾.

Como caso particular si $y(t)$ está definido para valores de $t=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, el par de transformadas tendrá por expresión:

$$S(W) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} \quad ; \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(W) e^{j\omega t} d\omega \quad ; \quad -\infty \leq t \leq \infty$$

A estas dos últimas expresiones les son de aplicación las observaciones contenidas en la nota 20 de este capítulo.

Hasta ahora no hemos hecho ninguna mención referente a la naturaleza de la función $y(t)$. Para nosotros esta función será la autocovarianza (o autocorrelación) derivada del proceso estocástico $x(t)$ ⁽²⁵⁾, por consiguiente la función de autocovarianza y el espectro son pares de transformadas de Fourier y la información que nos proporcione una también nos la suministra la otra.

Una pregunta que se plantea en forma inmediata a los defensores del análisis espectral es si la función de autocovarianza y el espectro contienen la misma información, ¿qué ventajas se obtienen al analizar el proceso a través del espectro en lugar de a través de la función de autocovarianza?

A esta interrogante suelen contestar diciendo que las estimaciones espectrales tienen propiedades muestrales más sencillas y que, además, facilita el análisis interpretativo.

En este trabajo no pretendo defender un sistema de análisis frente al otro. Mi intención radica en su utilización conjunta en la identificación de Representaciones Mixtas, Autorregresivas y Medias Móviles, que intentaremos aplicar a las series temporales, mejorando los métodos de identificación basados, exclusivamente en el análisis de la serie en el ámbito del tiempo.

Pasamos a continuación a estudiar la aplicación del análisis espectral a situaciones concretas que se presentan cuando nos encontramos con series económicas observadas a intervalos igualmente separados.

2.3.4) Espectro de una sucesión.

En las situaciones prácticas en que nos encontraremos no tenemos procesos estocásticos continuos sino procesos discretos explicitados a través de una sucesión o secuencia registrada a intervalos regulares. Es necesario, por tanto, establecer la expresión de su espectro y función de autocovarianza asociadas.

El primer problema que aparece es identificar las fuentes de variación mínimo cuadrática en la variable a estudiar. Si $x(t)$ es esta variable de naturaleza estocástica que se registra a intervalos Δ , es decir:

$$x(t), t=0; \pm\Delta; \pm2\Delta \pm 3\Delta \dots\dots\dots$$

la función de autocovarianza asociada será:

$$\text{AUCOV}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} g(W) e^{jWk} dw \quad K=0; \pm\Delta; \pm2\Delta \dots\dots\dots$$

que puede volverse a escribir como:

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{(2i-1)\frac{\eta}{\Delta}}^{(2i+1)\frac{\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} dw = \\ &= \int_{-\frac{\eta}{\Delta}}^{\frac{\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} dw + \int_{\frac{\eta}{\Delta}}^{\frac{3\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} dw + \int_{\frac{3\eta}{\Delta}}^{\frac{5\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} dw + \\ &+ \dots\dots + \int_{-\frac{3\eta}{\Delta}}^{-\frac{\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} dw + \int_{-\frac{5\eta}{\Delta}}^{-\frac{3\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} dw + \dots\dots = \\ &= \int_{-\frac{\eta}{\Delta}}^{\frac{\eta}{\Delta}} g(W) e^{jWk} + g\left(W + \frac{2\eta}{\Delta}\right) e^{j\left(W + \frac{2\eta}{\Delta}\right)k} + g\left(W + \frac{4\eta}{\Delta}\right) e^{j\left(W + \frac{4\eta}{\Delta}\right)k} + \\ &+ \dots\dots + g\left(W - \frac{2\eta}{\Delta}\right) e^{j\left(W - \frac{2\eta}{\Delta}\right)k} + g\left(W - \frac{4\eta}{\Delta}\right) e^{j\left(W - \frac{4\eta}{\Delta}\right)k} dw \end{aligned}$$

es decir,

$$\text{AUCOV}(K) = \int_{-\eta}^{\eta} g_a(W) e^{jWk} dw \quad K=0; \pm\Delta; \pm2\Delta \dots\dots\dots$$

y siendo $g_a(W)$ la expresión siguiente,

$$g_a(W) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g\left(W + \frac{2\eta i}{\Delta}\right) \quad |W| \leq \frac{\eta}{\Delta}$$

donde $g(\)$ es el espectro verdadero.

Por tanto calculamos para la sucesión $x(t)$, un espectro que está limitado al intervalo $(-\frac{\eta}{\Delta}, \frac{\eta}{\Delta})$. El espectro obtenido es el resultado de una superposición de contribuciones de varianza correspondientes al proceso continuo $x(t)$.

Este fenómeno recibe el nombre de enmascaramien⁽²⁶⁾to y tiene una explicación intuitiva relativamente sencilla. Si efectuamos una observación mensual de un fenómeno, por ejemplo el índice de precios corregido de su tendencia para poder asimilarlo a un proceso estacionario, no podremos distinguir entre las contribuciones provenientes de variaciones bimensuales, cuatrimestrales, et. Por otra parte la frecuencia máxima que podremos identificar (frecuencia de Nyquist)⁽²⁷⁾ será $\frac{\pi}{\Delta}$, que en el caso de nuestra observación mensual corresponderá a una oscilación con un período de dos meses.

Es importante resaltar el hecho de que si existen oscilaciones con frecuencia superior a la de Nyquist la estimación que se haga del espectro continuo a partir de la secuencia, puede ser una aproximación muy mala a menos que el espectro del proceso continuo se anule a partir de la citada frecuencia, cosa que nunca puede saberse con exactitud.

Si para simplificar suponemos que $\Delta = 1$ podemos escribir para la sucesión $x(t)$ o proceso discreto:

$$\text{AUCOV}(K) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jwk} g(w) dw, \text{ o bien, } R(K) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jwk} f(w) dw$$

y las relaciones asociadas,

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}(K) e^{-jwk}, \text{ o bien,}$$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{-jkw}$$

En virtud de las propiedades de la integral de Stieltjes.

2.3.5) Respuesta de un filtro lineal.

En el análisis de frecuencias un filtro es un dispositivo que selecciona del contenido total de frecuencias un cierto número de bandas de frecuencia⁽²⁸⁾ siendo éstos en general, de distinto ancho de banda⁽²⁹⁾ y que modifica las amplitudes asociadas a cada una de las frecuencias.

En la Ingeniería de Telecomunicación los filtros se clasifican de acuerdo con las bandas de frecuencia cuyo paso permiten, así por ejemplo, existen filtros paso alto, filtros paso bajo, paso banda, etc., según permitan el paso de las altas frecuencias, bajas frecuencias o los comprendidos entre dos frecuencias límite f_1 y f_2 o bien presenten estructuras más complejas.

En el análisis estadístico de series temporales muchas veces necesitaremos eliminar determinadas frecuencias para facilitar el análisis de la serie. Dos ejemplos típicos son:

- a) eliminar la tendencia incluida en la serie⁽³⁰⁾
- b) eliminar las componentes estacionales.

En estos casos procederemos a hacer pasar la serie bruta (es decir la que incluye los componentes perturbadores), por un filtro que diseñaremos en forma adecuada.

Los filtros pueden ser lineales y no lineales, nosotros nos limitaremos a los primeros.

Matemáticamente un filtro lineal se define como

una transformación lineal de $x(t)$ de la forma:

$$y(t) = \sum_{s=-p}^q a_s B^s x(t)$$

siendo B el operador retardo⁽³¹⁾ tal que,

$$B x(t) = x(t-1) \text{ y } B^s x(t) = x(t-s).$$

En suma, vemos que no es más que una combinación ponderada de valores pasados, actuales y futuros de una serie.

Normalmente el filtro es simétrico⁽³²⁾ en el sentido de que $p=q$, en cuyo caso se simplifican notablemente los resultados.

Veamos como podemos obtener la función de transferencia de un filtro lineal.

Si el filtro es el definido más arriba, es decir:

$$y(t) = \sum_{s=-p}^q a_s B^s x(t)$$

sucede que, al ser p y q finitos y $x(t)$ de covarianza estacionaria, $y(t)$ será también de naturaleza análoga a $x(t)$ siempre y cuando se cumpla:

$$\sum_{s=-p}^q a_s^2 < \infty$$

La función de autocovarianza de $y(t)$ resultante es:

$$AUCOV(K) = \sum_{r,s=-p}^q a_r a_s AUCOV x(k+r-s)$$

Esta relación anterior nos sirve para comprender las dificultades de interpretación que se presentan en el ámbito temporal para analizar el efecto del filtro y a través de la exposición que haremos a continuación, la mayor simplicidad que se consigue con su interpretación frecuencial.

Sabemos de 2.3.3), que el espectro y función de autocovarianza son transformadas de Fourier asociadas y también la 2.3.4 que:

$$g_y(W) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}_y(K) e^{-jWk}$$

siendo $g_y(W)$ el espectro de $y(t)$ y sustituyendo la expresión de $\text{AUCOV}_y(K)$ en la anterior

$$\begin{aligned} g_y(W) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{r,s=-p}^q a_r a_s \text{AUCOV } x(k+r-s) \right) e^{-jWk} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-p}^q a_r e^{jWr} \sum_{s=-p}^q a_s e^{-jWs} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV } x(K) e^{-jWk} \end{aligned}$$

por tanto

$$g_y(W) = |A(W)|^2 g_x(W)$$

siendo $A(W) = \sum_{s=-p}^q a_s e^{-jWs}$, la función de transferencia, que puede escribirse como:

$$A(W) = \sum_{s=-p}^q a_s e^{-jWs} = A_1(W) + j A_2(W) = G(W) e^{j\phi(W)}$$

es decir, dado que $A(W)$ es una expresión compleja, podemos expresarla en forma módulo argumental a través de

la expresión: $A(W) = G(W) e^{j\phi(W)}$; $G(W)$, recibe el nombre de ganancia del filtro y proporciona una amplificación o atenuación de las amplitudes asociadas a las frecuencias de la serie original $x(t)$.

$\phi(W)$, es el cambio de fase que introduce el filtro a cada una de las frecuencias. Este desfase que introduce el filtro se interpretará frecuentemente en términos de desfases temporales.

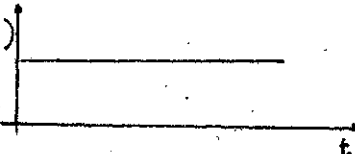
Otra forma de obtener la función de transferencia consiste en aprovechar el hecho de que una función impulso⁽³³⁾ tiene un espectro plano y de altura unidad. Haciéndolo pasar a través del filtro, el espectro resultante, será exactamente igual a la función de transferencia del filtro. Antes de calcular el espectro de esta función recordemos que la función impulso $I(x)$ es una función generalizada especificada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) I(x) dx = \phi(0)$$

siendo $\phi(x)$ cualquier función continua en el origen.

Calculemos ahora el espectro asociado a una función impulso, para ello procederemos en dos fases. En la primera calcularemos el espectro de una función escalon y en la segunda el de la función impulso.

A) Dada una función escalón $h_1(t)$ definida como

$$h_1(t) = \begin{array}{lll} 1/a & t > 0 & h_1(t) \\ 0 & t \leq 0 & 1/a \end{array}$$


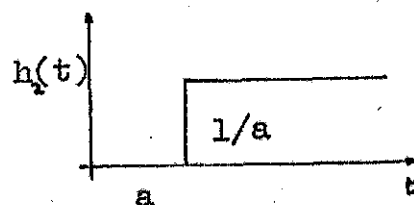
su espectro será:

$$g_1(W) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jWt} h_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jWt} \frac{1}{a} dt =$$

$$= \frac{-1}{j\omega a} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} \longrightarrow \frac{1}{j\omega a}$$

B) Si desplazamos $h(t)$ en "a" unidades de "t" tendremos:

$$h_2(t) = \begin{cases} 1/a & t \geq a \\ 0 & t \leq a \end{cases}$$

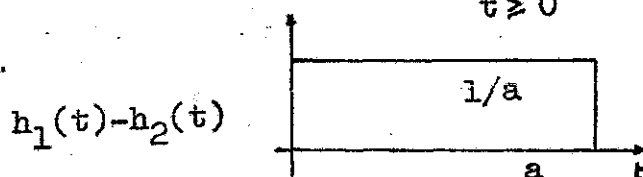


y su espectro será:

$$g_2(\omega) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega a} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{j\omega a} (1 - e^{-j\omega a})$$

En estas condiciones si restamos $h_2(t)$ de $h_1(t)$ tendremos:

$$h_3(t) = h_1(t) - h_2(t) = \begin{cases} 1/a & 0 \leq t \leq a \\ 0 & t \leq 0 \\ 0 & t \geq a \end{cases}$$



el espectro $H_3(\omega)$ vendrá dado por:

$$g_3(\omega) = g_1(\omega) - g_2(\omega) = \frac{1}{j\omega a} - \frac{1}{j\omega a} (1 - e^{-j\omega a})$$

y si pasamos al límite cuando $a \rightarrow 0$ obtendremos la función impulso, y su espectro será el correspondiente a $g_3(\omega)$.

$$g_4(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} g_3(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-j\omega a}}{j\omega a}$$

y aplicando L'hôpital resulta:

$$G_4(W) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{jW e^{-jWa}}{jW} \longrightarrow 1$$

$$G_4(W) = 1 = e^{-j0}$$

que proporciona un espectro constante.

Por tanto la función de transferencia del filtro también podrá escribirse como:

$$y(t) = \sum_{s=-p}^q a_s I(t), \text{ es decir,}$$

$$G_y(W) = \left| \sum_{s=-p}^q a_s e^{-jWs} \right|^2$$

Una vez visto como podemos calcular la función de transferencial del filtro veamos como podemos obtener a través de una serie completamente aleatoria otro espectro constante.

2.3.6) Espectro de una sucesión aleatoria.

Otro concepto que utilizaremos en forma intensiva es el de espectro de una sucesión aleatoria. Sea a_t la sucesión puramente aleatoria.

Se verifica:

$$E(a_t) = 0$$

$$E(a_t a_{t'}) = \begin{cases} \sigma^2 & t = t' \\ 0 & t \neq t' \end{cases}$$

es decir, la función de autocovarianza es nula excepto en el origen (t).

Utilizando la transformada de Fourier asociada tendremos:

$$g(W) = \frac{2}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jwk} \text{AUCOV}(K) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \quad (K=t-t')$$

por tanto,

$$g(W) = \frac{\sigma^2}{2\pi} e^{-\tau^2 W^2}$$

Esta propiedad es para nosotros muy importante al menos por dos razones:

- 1ª) Pasando una sucesión aleatoria por un filtro el análisis de su espectro nos da el cuadrado del módulo de la función de transferencia.
- 2ª) A través del análisis del espectro de los residuos de los modelos de regresión podríamos saber si éstos contienen todavía información que pueda ser aprovechable o si realmente es una componente puramente aleatoria que es inútil procesar a efectos de mejorar nuestro ajuste. Un ejemplo típico es el análisis de los residuos para ver si tienen componentes estacionales que apunten la necesidad de incorporar explícitamente variables en la regresión, variables que evidencien estacionalidad a efectos de obtener estimadores insesgados de los coeficientes de regresión del resto de regresores incluidos⁽³⁴⁾.

2.3.7) Estimación del espectro.

Hasta aquí nos hemos referido al concepto teórico de espectro, a su dualidad con la información que proporciona la función de autocorrelación, y en el caso de estar en presencia de una sucesión de valores correspondientes a un proceso estocástico, cual es la expresión de su espectro teórico. En este apartado abordamos en forma sucinta el problema práctico de calcular los valores concretos del espectro a partir de los datos originales correspondientes a $x(t)$.

Hemos demostrado que para procesos continuos se verifica⁽³⁵⁾:

$$\text{AUCOV}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwk} g(w) dw$$

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jwk} \text{AUCOV}(K) dK$$

y análogamente para procesos discretos:

$$\text{AUCOV}(K) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jwk} g(w) dw$$

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \text{AUCOV}(K) e^{-jwk}$$

Siempre que estemos en presencia de procesos reales (como sucederá con los provenientes de variables económicas) se verifica:

$$g(w) = g(-w)$$

$$dz(w) = dz(-w) \quad \begin{cases} du(w) = du(-w) \\ dv(w) = -dv(-w) \end{cases}$$

con lo cual,

$$E(du(w))^2 = E(dv(w))^2 = 2g(w) dw$$

$$E(du(0))^2 = dG(0) \quad ; \quad E(du(\pi)) = dG(\pi)$$

$$E(du(w_1) du(w_2)) = E(dv(w_1) dv(w_2)) = 0 \quad w_1 \neq w_2$$

$$E(du(w_1) dv(w_2)) = 0 \quad 0 \leq w_1 \quad w_2 \leq \pi$$

y por tanto los pares de transformadas podrán simplificarse de acuerdo con las expresiones siguientes⁽³⁶⁾:

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{jwk} g(w) dw = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(wk + j \sin wk) g(w) dw = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos wk g(w) dw + j \int_{-\pi}^{\pi} \sin wk g(w) dw = \int_{-\pi}^0 (\quad) dw + \\ &+ \int_0^{\pi} (\quad) dw + j \int_{-\pi}^0 (\quad) dw + j \int_0^{\pi} (\quad) dw = \\ &= 2 \int_0^{\pi} \cos wk g(w) dw \end{aligned}$$

dado que:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 \cos wk g(w) dw &= \int_0^{\pi} \cos wk g(w) dw = \\ &= \int_{-\pi}^0 \sin wk g(w) dw = - \int_0^{\pi} \sin wk g(w) dw \end{aligned}$$

por tanto:

$$\text{AUCOV}(K) = 2 \int_0^{\pi} \cos wk g(w) dw$$

y su transformada asociada será:

$$g(w) = \frac{1}{2\pi} \left(\text{AUCOV}(0) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \text{AUCOV}(K) \cos wk \right)$$

Dados los resultados anteriores parece que una estimación adecuada del espectro vendría dada por:

$$\tilde{g}(w) = \frac{1}{2\pi} \left(\text{aucov}(0) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \text{aucov}(k) \cos wk \right)$$

siendo $g(w)$ la estimación de $g(w)$ y, análogamente $\text{aucov}(k)$ la estimación de $\text{AUCOV}(K)$.

Desgraciadamente la estimación del espectro a través de la última expresión no proporciona resultados estadísticos adecuados⁽³⁷⁾, y por ello se pasó a estimar el espectro a través de la siguiente expresión⁽³⁸⁾:

$$\tilde{g}(w) = \frac{1}{2\pi} \left(\text{aucov}(0) p_0(w) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} p_k(w) \text{aucov}(k) \cos wk \right)$$

en la que vemos que se han introducido ponderaciones $p_k(w)$. La forma de seleccionar estas ponderaciones ha dado lugar a bastante debate. Una exposición de las distintas propiedades y formas de seleccionar las ponderaciones, $p_k(w)$, puede encontrarse en Hannan y Jenkins⁽³⁹⁾.

Las ponderaciones más utilizadas en el ámbito temporal son las siguientes:

	$p_k(w) = \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{nk}{m})$	$k < m$
Tukey-Hanning	0	$k > m$

	$1 - 6 \left \frac{k}{m} \right ^2 + 6 \left \frac{k}{m} \right ^3$	$k \leq m/2$
Parzen	$2 \left(1 - \left \frac{k}{m} \right \right)^3$	$m/2 \leq k \leq m$
	0	$k \geq m$

y sus expresiones correspondientes en el ámbito frecuencial son:

$$\text{Tukey-Hanning: } \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sen}(m+\frac{1}{2})w}{\text{sen } w/2} + \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(m+\frac{1}{2})(w-\pi/m)}{\text{sen}^2(w-\pi/m)} +$$

$$+ \frac{\text{sen}(m+1/3)(w-\pi/m)}{\text{sen}^2(w-\pi/m)}$$

$$\text{Parzen: } \frac{3}{8\pi m} \left(\frac{\text{sen } mw/4}{\text{sen } w/4} \right)$$

Antes de proseguir con nuestra exposición observemos que en las estimaciones que se obtienen utilizando la ponderación de Parzen, nos proporcionan valores que son siempre positivos para las $g(w)$, hecho que no siempre ocurre con las ponderaciones de Tukey-Hanning⁽⁴⁰⁾.

Las distintas ponderaciones dan lugar a una serie de propiedades diferentes para las estimaciones espectrales que, en cada caso, hacen aconsejable la utilización de una u otra ponderación⁽⁴¹⁾.

En las expresiones anteriores ha aparecido el factor m . Este parámetro que, normalmente, es inferior a la tercera parte del total de observaciones disponibles (N), indica el número de intervalos en los que se va a calcular la ordenada espectral media.

Cuando queremos representar el espectro con un número finito de datos (N) no podremos obtener todas y cada una de las ordenadas espectrales y por tanto nos conformamos con el cálculo de una especie de histograma espectral. Esta situación es similar al caso

en que disponemos de un número finito de puntos y con ellos no nos es posible calcular la representación completa de la función de densidad de probabilidad y consiguientemente calculamos su histograma.

Por el momento no existe acuerdo unánime respecto a la relación que debe existir entre el total de observaciones y el parámetro m , aunque es bien sabido que cuanto mayor sea m mayor será la varianza de cada estimación individual.

Una vez introducidos los conceptos más importantes, para el análisis de series temporales, pasamos en el capítulo III, a estudiar las Representaciones a las que ajustaremos los datos disponibles.

C A P I T U L O I I I

Una vez familiarizados con la descripción de la serie en los ámbitos temporal y frecuencial tenemos que referirnos al aspecto descriptivo y predictivo puesto que nos interesa, como economistas, la posibilidad de descripción y predicción a efectos de poder llevar a cabo, en las mejores condiciones posibles, el control de la actividad económica.

La necesidad de controlar y la existencia de retardos⁽¹⁾ justifican los análisis de previsión. En caso de no existir retardos bastaría con comprobar cuantitativamente la existencia de cierta relación causal para actuar en consecuencia. Por ejemplo, si admitimos la versión más sencilla de la teoría cuantitativa⁽²⁾ y en determinada circunstancia se produce inflación, de no existir retardos se podrá corregir esta situación, instantáneamente, reduciendo la oferta monetaria. En situaciones reales esto no sucede y, por tanto, si en el instante t_k existe inflación y queremos dominarla para t_{k+j} ($j > 0$) deberemos actuar en el período (t_k, t_{k+j}) . Como vemos esto implica la necesidad de conocer la situación futura para poder llevar a cabo el proceso de control⁽³⁾.

Para cumplir este fin intentaremos ajustar nuestros datos a tres tipos de Representaciones básicas: Medias Móviles, Autorregresivas y Mixtas. Por ello pasamos a analizar en primer lugar las condiciones de existencia de este tipo de Representaciones y después haremos el análisis individualizado de cada una de ellas.

Es aquí donde comienza el núcleo principal del trabajo puesto que investigaré, en la medida de los medios posibles, la posibilidad de una nueva técnica de identificación de estas Representaciones que, convencionalmente, han venido en llamarse de Box-Jenkins en honor de los dos investigadores que más han contribuido a su difusión.

3.1) Existencia de las Representaciones en Media Móvil⁽⁴⁾ y Autorregresivas.

Yule y Slutsky hicieron notar que una serie temporal obtenida a través de una de las dos representaciones siguientes:

$$x(t) = a_t - T_1 a_{t-1} - T_2 a_{t-2} \dots - T_k a_{t-k}$$

$$x(t) = a_t - F_1 x(t-1) - F_2 x(t-2) \dots - F_k x(t-k)$$

donde a_t es una sucesión aleatoria de media cero y varianza ², presentaba una evolución relativamente suave. Esta apariencia es característica de muchas series temporales que se presentan en Física (por ejemplo, número de manchas solares), Ingeniería (por ejemplo, tensión de salida de un amplificador en ausencia de señal) y también en Economía (por ejemplo, nivel de precios, renta nacional, etc., todas ellas sin tendencia).

La primera de las expresiones se refiere a la Representación en Media Móvil y la segunda a la Autorregresiva⁽⁵⁾.

El resultado básico que técnicamente nos permite utilizar esta Representación se basa en el teorema de Wold que asegura la descomposición de una serie de covarianza estacionaria de acuerdo con:

$$x(t) = D(t) + A(t)$$

siendo

$$D(t) = \sum_{k=1}^n k_k e^{j\omega_k t}$$

$$A(t) = \sum_{s=0}^{\infty} T_s a_{t-s} \quad \text{tal que} \quad \sum_{s=0}^{\infty} T_s^2 < \infty$$

donde las T_s forman una sucesión de constantes y b_k y a_t son variables aleatorias sin correlación. Se verifica, además, que la componente D_t , llamada determinista, tiene covarianza nula.

A través de las relaciones anteriores vemos que toda sucesión de covarianza estacionaria puede descomponerse en dos sucesiones. Una determinista $D(t)$ que es función de la variable t y, también, de una combinación de funciones circulares. La segunda, no determinista, está integrada por una Media Móvil.

Se demostrará más adelante que si se cumplen ciertas condiciones de invertibilidad la Representación en Media Móvil es equivalente a otra de tipo Autorregresivo y viceversa y, dado que, en general las series económicas no presentan periodicidades fijas, toda serie $x(t)$ podrá interpretarse mediante este tipo de Representaciones, sin necesidad de considerar la componente $D(t)$.

3.2) Representación en Media Móvil.

Hemos dicho en 3.1) que la Representación en Media Móvil (MV) viene dada por:

$$x(t) = a_t - T_1 a_{t-1} - T_2 a_{t-2} \dots - T_k a_{t-k}$$

donde k indica el orden de la representación. Por tanto $x(t)$ se ajusta a una Representación en Media Móvil de orden k , $MV(k)$.

Nótese que en general $T_k \neq 1$ y que, además, los coeficientes T_k no necesitan ser todos positivos.

Si ahora utilizamos el operador de retardo B , introducido en 2.3.5), podemos definir el operador de Media Móvil de orden k , $T(B)$ de acuerdo con la expresión siguiente:

$$T(B) = 1 - T_1 B - T_2 B^2 \dots - T_k B^k$$

por tanto la $MV(k) = T(B) a_t$.

El número de parámetros que están involucrados en la relación anterior son: $(T_1; T_2 \dots; T_k; \sigma^2)$, $k+1$ parámetros en total⁽⁶⁾, y deberán ser estimados a partir de los N datos disponibles de la serie $x(t)$.

3.2.1) Estacionariedad.

Si suponemos⁽⁷⁾ que las distintas a_t son independientes entre sí y están, además, idénticamente distribuidas se puede demostrar que, $x(t)$ es estrictamente estacionario con lo cual, también lo será en rela-

ción a su covarianza.

La función característica de $x(t), X(t+1) \dots \dots \dots x(t+n)$ será⁽⁸⁾:

$$\begin{aligned} \varphi(\phi) &= E(e^{j\phi_1 x(t) + \phi_2 x(t+1) + \dots + \phi_{n+1} x(t+n)}) = \\ &= E(e^{j \sum_{s=0}^n (\phi_1 T_s a_{t-s} + \phi_2 T_s a_{t+1-s} + \dots + \phi_{n+1} T_s a_{t+n-1-s})}) = \\ &= E(e^{j \sum_{s=0}^n a_{t-s} (\phi_1 T_s + \phi_2 T_{s-1} + \dots + \phi_{n+1} T_{s-n})}) = \\ &= E(e^{j \sum_{s=0}^n a_{t-s} \phi_s}), \quad \text{siendo } T_s = 0 \quad s < 0 \quad \text{y donde} \\ \phi_s &= \phi_1 T_s + \phi_2 T_{s-1} + \dots + \phi_{n+1} T_{s-n}. \end{aligned}$$

Nótese, además, que hemos supuesto que la Media Móvil era de longitud infinita.

En estas condiciones y dadas las propiedades que hemos supuesto para las perturbaciones a_t se tendrá:

$$\varphi(\phi) = \prod_{s=0}^{\infty} E e^{j a_{t-s} \phi_s} = \prod_{s=0}^{\infty} \varphi_a(\phi_s)$$

donde φ_a es la función característica de a_t , y puesto que a_t es estrictamente estacionaria, dadas las propiedades que le hemos atribuido, resulta que $\varphi(\phi)$ también será estrictamente estacionaria. Se puede demostrar⁽⁹⁾, también, que la condición para que $x(t)$ sea estacionaria es que, $T(B)$ converja dentro o sobre el círculo de radio unidad. Precisemos además las condiciones en las que la varianza de $x(t)$ es finita:

$$E(x(t)) = E(a_t) - T_1 E(a_{t-1}) \dots \dots \dots = 0$$

$$E x(t)^2 = E (a_t - T_1 a_{t-1} \dots \dots \dots) (a_t - T_1 a_{t-1} \dots \dots) =$$

$$= E[a_t^2 + T_1^2 a_{t-1}^2 + T_2^2 a_{t-2}^2 + \dots] + a_t(-T_1 a_{t-1} - T_2 a_{t-2} \dots) + \dots] = \sigma^2 (1 + T_1^2 + T_2^2 + \dots)$$

por consiguiente para que la varianza sea finita deberá verificarse que:

$$\sum_{s=0}^{\infty} T_s^2 \text{ sea convergente.}$$

Por último es conveniente observar que para Representaciones en Media Móvil finitas, las condiciones de estacionariedad y varianza finita se verifican consiguientemente.

3.2.2) Invertibilidad

Este concepto se refiere a las condiciones bajo las que se puede pasar de una Representación en Media Móvil a otra de tipo Autorregresivo.

A través del estudio del problema de la invertibilidad lo que buscamos es dada una Media Móvil hallar su equivalente Autorregresiva. Esta condición es independiente de la estacionariedad⁽¹⁰⁾.

Concretamente si tenemos $x(t) = T(B) a_t$ ¿bajo qué condiciones existe $a_t = T^{-1}(B) x(t)$?, siendo $T(B)$ el operador en Media Móvil de orden K .

Dado que $T(B)$ es un polinomio en B de orden K sabemos, de acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, que tiene K raíces que designamos por:

$$(h_1^{-1} ; h_2^{-1} ; \dots h_k^{-1})$$

por tanto:

$$T(B) = (1-h_1 B)(1-h_2 B) \dots (1-h_k B) =$$

$$= \prod_{i=1}^k (1-h_i B),$$

y consiguientemente,

$$x(t) = \prod_{i=1}^K (1-h_i B) a_t$$

$$a_t = \frac{x(t)}{\prod_{i=1}^K (1-h_i B)}$$

para cada una de las fracciones $(1-h_i B)^{-1}$ se verifica:

$$(1-h_i B)^{-1} = 1+h_i B+h_i^2 B^2 + \dots$$

y de acuerdo con lo anterior:

$$a(t) = (1+h_1 B+h_1^2 B^2 + \dots)(1+h_2 B+h_2^2 B^2 + \dots)$$

$$(1+h_k B+h_k^2 B^2 + \dots) x(t),$$

y aislando el paréntesis i-enésimo,

$$z(t) = (1+h_i B+h_i^2 B^2 + \dots)x(t) = x(t) + h_i x(t-1) + h_i^2 x(t-2) + \dots$$

En estas condiciones si se verifica $|h_i| \geq 1$, ello significa que los valores pasados de $x(t)$ tendrían mayor importancia cuanto más nos alejamos de t . Esta situación, en condiciones reales, no es plausible y llevaría consigo que $x(t)$, representado a través de una Media Móvil de orden K , no es invertible.

Por el contrario si $|h_i| < 1$ las ponderaciones asignadas a las observaciones pasadas, son cada vez menores y, por consiguiente, sólo son los valores recientes de las observaciones los que configuran a $x(t)$.

El estudio realizado para la raíz i -enésima es el mismo para todas ellas. Si por ejemplo $K=1$ raíces fueran en valor absoluto menores que la unidad y una de ellas, h_j , fuera mayor que la unidad al ser conmutativo el producto se podría escribir:

$$a_t = (1 + h_1 B + h_1^2 B^2 + \dots)(1 + h_2 B + \dots) \dots (1 + h_k B + h_k^2 B^2 + \dots)$$

$$(1 + h_j B + h_j^2 B^2 + \dots) x(t) = (1 + h_1 B + h_1^2 B^2 + \dots) \dots$$

$$(1 + h_k B + h_k^2 B^2 + \dots) z(t)$$

estando, en este caso, $z(t)$ dominada por valores anteriores de $x(t)$. Al tener en cuenta el siguiente término, $(1 + h_k B + \dots)$, no se produciría ninguna modificación por resultar:

$$z(t) + (h_k B + h_k^2 B^2 + \dots) z(t).$$

Por consiguiente una representación en Média Móvil de orden K es invertible si cada raíz de $T(B)$, $(h_1^{-1} \dots h_k^{-1})$ es, en valor absoluto, menor que la unidad. Esta proposición anterior es equivalente a decir que las K raíces del operador $T(B)$ deben situarse fuera del círculo de radio unidad.

Como resumen de los dos puntos anteriores 3.2.1) y 3.2.2) se tiene que, las condiciones de estacionarie

dad e invertibilidad obligan a que $T(B)$ converja dentro o sobre el círculo de radio unidad, y que las raíces del operador se sitúen fuera del círculo de radio unidad respectivamente.

3.2.3) Función de autocorrelación,

Dado $x(t) = T(B) a_t$ siendo $T(B)$ de orden s ,

$$m = E x(t) = E (1 - T_1 B \dots - T_s B^s) a_t = 0$$

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) &= E x(t) x(t+k) = E (a_t - T_1 a_{t-1} \dots - T_s a_{t-s}) \\ &\quad (a_{t+k} - T_1 a_{t+k-1} \dots - T_s a_{t+k-s}) \end{aligned}$$

por tanto,

$$\text{AUCOV}(K) = \sigma^2 (-T_k + T_1 T_{k+1} + T_2 T_{k+2} + \dots + T_{s-k} T_s); K=1, 2, \dots, S$$

$$\text{AUCOV}(K) = 0$$

en particular obsérvese que si $K=0$ obtenemos el resultado:

$$\text{AUCOV}(0) = \sigma^2 (1 + T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_s^2)$$

por consiguiente la función de autocorrelación será:

$$R(K) = \frac{\text{AUCOV}(K)}{\text{AUCOV}(0)}$$

$$R(K) = \frac{(-T_k + T_1 T_{k+1} + T_2 T_{k+2} + \dots + T_{s-k} T_s)}{1 + T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_s^2}; K=1, 2, \dots, S$$

$$R(K) = 0$$

K S

De la expresión anterior se deduce una propiedad de gran interés para nosotros: "La función de autocorrelación para una Media Móvil de orden s se anula para retardos superiores a " s ".

Esta propiedad es básica en unión de la función de autocorrelación parcial para lo que podemos llamar análisis clásico de la identificación de las estructuras a ajustar a la serie temporal.

3.2.4) Función de autocorrelación parcial.

Por comodidas de exposición este punto está desarrollado conjuntamente con la función de autocorrelación parcial de una Representación Autorregresiva en el epígrafe 3.3.4).

3.2.5) Medias Móviles de primer y segundo orden.

a) MV(1)

La media móvil de primer orden verifica:

$$x(t) = a_t - T_1 a_{t-1}$$

Estacionariedad: de acuerdo con 3.2.1) es estacionaria para todo valor del parámetro T_1 .

Invertibilidad: 3.2.3) nos asegura que para que sea invertible la raíz, ya que en este caso es única, del polinomio $T(B)=0$, debe situarse fuera del círculo de radio unidad, por tanto deberá verificarse:

$$-1 < T_1 < 1$$

Función de autocorrelación: como caso particular de 3.2.3) para $K=1$ se tiene:

$$\text{aucov}(1) = \sigma^2 (-T_1)$$

$$R(1) = \frac{-T_1}{1+T_1^2}$$

Función de autocorrelación parcial: se demuestra en 3.3.4).

$$F_{ss} = \frac{-T_1^s(1-T_1^s)}{1-T_1^2(s+1)}$$

b) MV(2).

La Media Móvil de segundo orden viene definida por:

$$x(t) = (1-T_1B - T_2B^2) a_t$$

Estacionariedad: al ser de orden finito y de acuerdo con 3.2.1), $x(t)$ será estacionario para todos los valores de T_1 y T_2 .

Invertibilidad: para que se pueda invertir las dos raíces del operador de Media Móvil,

$$1-T_1B - T_2B^2 = 0$$

deben estar situadas fuera del círculo de radio unidad y por tanto:

$$B_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 + 4T_2}}{2T_2}$$

si las raíces son reales deberá verificarse:

$$\frac{-T_1 + \sqrt{T_1^2 + 4T_2}}{2T_2} > 1 \quad ; \quad \frac{-T_1 - \sqrt{T_1^2 + 4T_2}}{2T_2} < -1$$

de la primera obtenemos:

$$T_1^2 + 4T_2 > (2T_2 + T_1)^2 \quad ; \quad 4T_2 > 4T_2^2 + 4T_1T_2 \quad ; \quad 1 > T_2 + T_1$$

de la segunda:

$$T_1^2 + 4T_2 > (T_1 - 2T_2)^2 \quad ; \quad 4T_2 > 4T_2^2 + 4T_1T_2 \quad ; \quad 1 > T_2 - T_1$$

y si las raíces son complejas,

$$\frac{-T_1 \pm j \sqrt{-(T_1^2 + 4T_2)}}{2T_2}$$

$$\frac{1}{4T_2^2} (T_1^2 - T_1^2 - 4T_2) > |1| \quad ; \quad \frac{-1}{T_2^2} > |1|$$

es decir $\frac{1}{T_2^2} < |1|$, por tanto $-1 < T_2 < 1$.

En resumen, las condiciones que deben cumplir los parámetros para que sea invertible⁽¹¹⁾ la MV(2) son:

$$T_2 + T_1 < 1$$

$$T_2 - T_1 < 1$$

$$-1 < T_2 < 1$$

Función de autocorrelación: de acuerdo con 3.2.3) tendremos:

$$R(1) = \frac{-T_1(1-T_2)}{1+T_1^2 + T_2^2}$$

$$R(2) = \frac{-T_2}{1+T_1^2+T_2^2}$$

$$R(K) = 0 \quad K \geq 3$$

Función de autocorrelación parcial: de acuerdo con los resultados de 3.3.4) basta aquí decir que, su expresión es bastante compleja y que si las raíces de $T(B)=0$ son reales, está configurada por la suma de dos exponenciales y si éstas son complejas, por una función circular atenuada.

3.3) Representación Autorregresiva.

El segundo tipo de modelo al que vamos a referirnos es el Autorregresivo.

Viene caracterizado por:

$$x(t) = F_1 x(t-1) - F_2 x(t-2) \dots \dots \dots = a_t$$

y si limitamos el número de autorregresores a K , tendremos una Representación Autorregresiva del citado orden.

La variable aleatoria a_t tiene las propiedades ya mencionadas de media nula y estacionariedad.

En forma análoga al operador de Media Móvil podemos definir el correspondiente operador autorregresivo:

$$F(B) = 1 - F_1 B - F_2 B^2 - F_3 B^3 \dots \dots \dots$$

En estas condiciones: $F(B) x(t) = a_t$.

Pasemos, a continuación, a las condiciones de estacionariedad e invertibilidad de $x(t)$.

3.3.1) Estacionariedad.

La expresión relativa al modelo autorregresivo puede escribirse bajo ciertas condiciones, que a continuación veremos, como: $x(t) = F^{-1}(B) a_t$.

Pero esta forma de representar a $x(t)$ nos recuerda la anterior en Media Móvil sin más que iden

tificar $F^{-1}(B)$ con el adecuado operador de Media Móvil $T(B)$. Ahora bien, para que $x(t)$ sea estacionario hemos visto que $T(B)$ debe converger para $|B| \leq 1$, y dado que $F(B)$ puede expresarse de acuerdo con sus raíces como:

$$F(B) = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_k B) = \prod_{i=1}^k (1 - g_i B)$$

se verifica:

$$T(B) = F^{-1}(B) = \frac{1}{\prod_{i=1}^k (1 - g_i B)}$$

y si, $T(B)$, tiene que ser convergente dentro o sobre el círculo de radio unidad, necesitaremos que $|g_i| < 1$, es decir, las raíces de $F(B)$ tendrán que estar situadas fuera del círculo de radio unidad.

Por consiguiente, la condición de estacionariedad equivale a decir que las raíces del operador autorregresivo deben estar fuera del círculo de radio unidad.

3.3.2) Invertibilidad.

Siempre que estemos en presencia de un proceso autorregresivo de orden finito no existen problemas de invertibilidad, dada la definición que de la misma hemos hecho en 3.2.2) al referirnos al problema de la invertibilidad en las Medias Móviles.

Para nosotros, al igual que Box y Jenkins⁽¹²⁾ las condiciones de estacionariedad e invertibilidad son independientes. Precisamente es esta independen-

cia la que nos ha permitido decir que toda representación autorregresiva de orden finito es invertible.

Contrariamente a esta postura Fishman⁽¹³⁾ dice que, por ejemplo, el modelo $x(t)-x(t-1)=a_t$ no tiene representación en Media Móvil. A mi modo de ver este hecho se produce dato que Fishman parece analizar con juntamente los citados conceptos de estacionariedad e invertibilidad. Veamoslo:

La condición de estacionariedad para el operador autorregresivo obtenida en 3.3.1) obliga a sus raíces a situarse fuera del círculo de radio unidad pero, para el ejemplo que cita Fishman, la única raíz del operador está, precisamente, sobre el círculo de radio unidad, por consiguiente el modelo no es estacionario, y por tanto ambas propiedades no se verifican conjuntamente.

Además la varianza de $x(t)$ es divergente si pasamos a la representación en Media Móvil:

$$x(t)-x(t-1) = a_t \quad ; \quad (1-B) x(t) = a_t$$

$$x(t) = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \dots$$

$$E(x(t)) = 0$$

$$E(x(t)^2) = \sum_{1}^{\infty} \sigma^2 \longrightarrow \text{divergente}$$

A nuestro modo de ver a Box y Jenkins no les preocupa la asociación de ambas propiedades puesto que, muchas de las series con las que se enfrentaran no son estacionarias, en cuanto a los datos originales pero, calculando sus diferencias de primer, segundo o tercer orden (como máximo) las pueden re-

ducir a otras estacionarias. Esta va a ser también nuestra situación y, por consiguiente, seguimos su criterio.

3.3.3) Función de autocorrelación.

Sea $F(B) x(t) = a_t$ nuestro modelo Autorregresivo de orden s y supongamos que a_t tiene las mismas propiedades que venimos utilizando.

En estas condiciones: $E(x(t)) = 0$, por tanto su función de autocovarianza será:

$$AUCOV(K) = E(x(t) x(t+k)) = E(F_1(x(t-1)) + \dots + F_s x(t-s) + a_t).$$

$$.(F_1 x(t+k-1) + \dots + F_s x(t+k-s) + a_{t+k})$$

$$AUCOV(K) = F_1 AUCOV(K-1) + F_2 AUCOV(K-2) + \dots + F_s AUCOV(K-s)$$

$$K > 0$$

y si dividimos todo por $AUCOV(0)$ obtendremos la función de autocorrelación $R(K)$:

$$R(K) = F_1 R(K-1) + F_2 R(K-2) + \dots + F_s R(K-s) \quad K > 0$$

La estructura de la relación anterior nos informa que se trata de una ecuación en diferencias. La solución⁽¹⁴⁾ de esta ecuación consiste, en general, de una combinación de funciones sinusoidales y exponenciales atenuadas.

Veamos, a continuación, el sistema de ecuación que resulta una vez que sustituimos el índice K por los distintos valores que puede tener.

En total serán, s , ecuaciones puesto que K varía entre 1 y s .

Por tanto:

$$R(1) = F_1 + F_2 R(1) + F_3 R(2) + \dots + F_s R(s-1) \quad K=1$$

$$R(2) = F_1 R(1) + F_2 + F_3 R(1) + \dots + F_s R(s-2) \quad K=2$$

$$R(3) = F_1 R(2) + F_2 R(1) + F_3 + \dots + F_s R(s-3) \quad K=3$$

$$R(s) = F_1 R(s-1) + F_2 R(s-2) + \dots + F_s \quad K=s$$

Este conjunto de s ecuaciones recibe el nombre de sistema de Yule-Walker.

En rotación matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & R(1) & R(2) & \dots & R(s-1) \\ R(1) & 1 & R(1) & \dots & R(s-2) \\ \vdots & & & & \\ R(s-1) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(s) \end{bmatrix}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_k \\ F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R(1) & \dots & R(s-1) \\ \vdots & & & \\ R(s-1) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(s) \end{bmatrix}$$

A través del último conjunto de realizaciones pueden obtenerse los s coeficientes del operador autorregresivo a partir de los coeficientes de autocorrelación.

3.3.4) Función de autocorrelación parcial.

Si designamos por F_{sj} el coeficiente j -enésimo de una representación $AR(s)$ entonces F_{ss} considerada como una función del retardo s , recibe el nombre de función de autocorrelación parcial.

F_{ss} puede interpretarse de otra forma sin más que considerar un $AR(2)$, que recibe el nombre de representación de Yule.

$$x(t) = F_1 x(t-1) + F_2 x(t-2) + a_t$$

Para este modelo las ecuaciones de Yule-Walker serán:

$$R(1) = F_1 + F_2 R(1)$$

$$R(2) = F_1 R(1) + F_2$$

por tanto,

$$R_1 = \frac{F_1}{1-F_2} \quad ; \quad R_2 = \frac{F_1^2}{1-F_2} + F_2$$

Calculemos el coeficiente parcial de autocorrelación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R(1) \\ R(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2 & 1 \\ F_2 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_2 & 1 \\ F_2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & R(1) \\ R(1) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{1-R(1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -R(1) \\ -R(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por tanto,

$$F_2 = \frac{-R(1)^2 + R(2)}{1 - R(1)^2}$$

Pero si tenemos en cuenta que AR(2) puede considerarse como la regresión de $x(t)$ sobre $x(t-1)$ y $x(t-2)$, tenemos que el coeficiente de correlación parcial entre $x(t)$ y $x(t-2)$ viene dado por la siguiente expresión⁽¹⁵⁾:

$$\rho_{x(t) x(t-2) \cdot x(t-1)} = \frac{\rho_{x(t)x(t-2)} - \rho_{x(t)x(t-1)}\rho_{x(t-2)x(t-1)}}{(1 - \rho_{x(t)x(t-1)}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - \rho_{x(t-2)x(t-1)}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

que de acuerdo con la notación que empleamos:

$$\rho_{x(t)x(t-2)} = R(2); \rho_{x(t)x(t-1)} = R(1); \rho_{x(t-2)x(t-1)} = R(1)$$

por tanto,

$$\rho_{x(t)x(t-2) \cdot x(t-1)} = \frac{R(2) - R(1) R(1)}{(1 - R(1)^2)^{\frac{1}{2}} (1 - R(1)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{R(2) - R(1)^2}{1 - R(1)^2}$$

que es exactamente igual a F_2 .

Por otra parte, y dado que $x(t)$ es estacionaria, se verifica que las desviaciones típicas de $x(t)$ y $x(t-2)$ son iguales. Por consiguiente si interpretamos F_2 como coeficiente de regresión vendrá determinado por:

$$b_1 = \frac{R(2) - R(1)^2}{1 - R(1)^2} \frac{\sum_{t=1}^n x_t^2}{\sum_{t=1}^n x_{t-2}^2} = \frac{R(2) - R(1)^2}{1 - R(1)^2}$$

con lo que se demuestra que F_2 coincide con F_2 , coeficiente de regresión del regresor que representa el mayor retardo. Esta interpretación se generaliza a representaciones de mayor orden.

Como corolario de lo anterior es fácil demostrar que los coeficientes de regresión de orden superior al determinado por el grado de la representación autorregresiva se anulan. Esto implica que la función de autocorrelación parcial de un AR(s) sufre un corte después del retardo s. Este resultado anterior es de gran utilidad para la identificación de los modelos como veremos con más detalle en el capítulo correspondiente.

Una vez introducido el concepto de función de autocorrelación parcial podemos aplicarlo a la representación en Media Móvil.

Para lograr mayor simplicidad aplicaremos este concepto a una Media Móvil de orden uno.

De acuerdo con 3.2.3) tenemos:

$$R(1) = \frac{-T_1}{1+T_1^2} \quad R(s) = 0 \quad \text{para } s > 1$$

e introduciendo las ecuaciones de Yule-Walker desarrolladas en 3.3.3) se deduce:

$$F_{ss} = \frac{-T_1^s (1-T_1^2)}{1-T_1^2(s+1)}$$

y por consiguiente $|F_{ss}|$ es menor que T_1^s . Por tanto la función de autocorrelación parcial queda configurada por una exponencial, existiendo por consiguiente un número infinito de F_{ss} correspondientes a esta representación en Media Móvil.

El resultado anterior se generaliza a cualquier

Media Móvil de orden superior a la unidad. En este caso la función de autocorrelación parcial también es infinita en longitud y está configurada por exponenciales atenuadas y funciones circulares.

El resultado anterior se obtiene en base a que una Media Móvil puede sustituirse por un Modelo Autorregresivo de longitud infinita, siempre que se verifiquen las condiciones de invertibilidad, y como la representación autorregresiva verifica la relación:

$$R(K) = F_1 R(K-1) + F_2 R(K-2) + \dots + F_s R(K-s)$$

cuando $s \rightarrow \infty$ esta relación tendrá infinitos términos y su solución (véase 3.3.3) consistirá, en general, en una combinación de funciones circulares y exponenciales.

A través de la exposición de los epígrafes anteriores observamos una dualidad entre las Representaciones en Media Móvil y Autorregresiva⁽¹⁶⁾:

- 1) Una $MV(K_1)$ tiene una función de autocorrelación que se anula a partir de $K > K_1$, pero dada su equivalencia con un $AR(\infty)$ su función de autocorrelación parcial contiene infinitos términos y está configurada por exponenciales y funciones circulares atenuadas.

Por el contrario una $AR(K_2)$ tiene una función de autocorrelación parcial que se anula a partir de $K > K_2$, mientras que su función de autocorrelación es de infinitos términos que están configurados por exponenciales y funciones circulares atenuadas.

- 2) Una $AR(K_2)$ no necesita que sus parámetros cumplan condiciones que garanticen la invertibilidad. Sin embargo las raíces de $F(B)$ deben situarse fuera del círculo de radio unidad. Por el contrario los parámetros de una $MV(K_1)$ no requieren verificar ninguna condición para que la representación sea estacionaria, mientras que el operador $T(B)$ debe tener sus raíces fuera del círculo de radio unidad para que pueda ser invertible.

3.3.5) Representaciones autorregresivas de 1º y 2º orden.

a) $AR(1)$.

En este caso se verifica la relación:

$$x(t) - F_1 x(t-1) = a_t ; (1 - F_1 B) x(t) = a_t$$

Estacionariedad: de acuerdo con 3.3.1), $x(t)$ será estacionaria siempre que las raíces de $F(B)=0$ estén situadas fuera del círculo de radio unidad, por tanto, $-1 < F_1 < 1$

Invertibilidad: dado que se trata de una representación autorregresiva de orden finito no se requieren condiciones para que se cumpla esta condición (3.3.2).

Función de autocorrelación: aplicando 3.3.3) tenemos que: $R(K) = F_1 R(K-1)$ que es una ecuación en diferencias de primer orden cuya solución:

$$R(K) = F_1^K$$

Función de autocorrelación parcial: según lo explicitado en 3.3.4) ésta se reduce a un sólo término, F_1 , siendo nulos todos los demás.

b) AR(2).

La relación que verifica viene dada por:

$$x(t) - F_1 x(t-1) - F_2 x(t-2) = a_t$$

o sea,

$$(1 - F_1 B - F_2 B^2) x(t) = a_t$$

Estacionariedad: por análogas consideraciones a AR(1) se requerirán que las raíces de $F(B)=0$ estén situadas fuera del círculo de radio unidad. Por consiguiente le es de aplicación el mismo desarrollo que el efectuado en 3.2.5) para la invertibilidad de MV(2). En estas condiciones la zona permisible para los parámetros será:

$$F_2 + F_1 < 1$$

$$F_2 - F_1 < 1$$

$$-1 < F_2 < 1$$

Invertibilidad: no se requieren condiciones adicionales sobre los parámetros para asegurar esta propiedad.

Función de autocorrelación: de acuerdo con 3.3.3) se verificará:

$$R(K) = F_1 R(K-1) + F_2 R(K-2)$$

que es una ecuación en diferencias de segundo orden. Si las raíces de $F(B)=0$ son reales, la solución consiste en exponenciales atenuadas, y si éstas son complejas aparecen un comportamiento pseudo-periódico⁽¹⁷⁾.

Función de autocorrelación parcial: según el desarrollo de 3.3.4) esta función consta sólo de dos

términos siendo los demás nulos.

3.4) Representación Mixta.

Definiremos en primer lugar este tipo de representación para pasar, después a las condiciones de existencia, estacionariedad y funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.

3.4.1) Definición y Existencia de la Representación Mixta.

Hemos visto las representaciones en Media Móvil y Autorregresiva, así como también su dualidad. Esta dualidad tiene, a efectos prácticos, un inconveniente puesto que si pasamos de una $MV(K_1)$ a una $AR(K_2)$, K_2 puede ser bastante elevado. Esto se traduce en que con los N datos de la serie temporal disponible tendríamos que calcular K_{2+1} parámetros. Nosotros estamos interesados en calcular el menor número posible de los mismos y consiguientemente nos preguntamos si $x(t)$ en lugar de ser descrita en base a las dos representaciones anteriores, puede serlo de acuerdo con:

$$x(t) - F_1 x(t-1) - \dots - F_{k_1} x(t-k_1) = a_t - T_1 a_{t-1} - \dots - T_{k_2} a_{t-k_2}$$

a este tipo de representación que es Autorregresiva sobre $x(t)$ y de Media Móvil para a_t le llamamos Representación Mixta, $ARMA(K_1 K_2)$, haciendo alusión el primer subíndice al grado de la parte Autorregresiva y el segundo a la de Media Móvil.

Si tenemos en cuenta que:

$$F(B) = 1 - F_1 B - F_2 B^2 - \dots - F_{k_1} B^{k_1}$$

$$T(B) = 1 - T_1 B - T_2 B^2 - \dots - T_{k_2} B^{k_2}$$

La Representación Mixta podrá expresarse por:

$$F(B) x(t) = T(B) a_t.$$

La propiedad que nos interesa destacar con este modelo deriva del hecho de que contiene un número menor de parámetros que las Representaciones Simples Autorregresivas y de Media Móvil.

Existencia: La existencia de las Representaciones Mixtas se basa en el siguiente teorema⁽¹⁸⁾:

"Si $a(t)$ es una sucesión de variables aleatorias, siendo $a(t)$ ruido blanco⁽¹⁹⁾ y

$$x(-K_1); x(-K_1+1); x(-K_1+2); \dots x(1)$$

son K_1 observaciones, existe una única $x(t)$ que verifica $F(B) x(t) = T(B) a_t$ y que toma los K_1 valores iniciales".

Pasaremos a continuación a las condiciones de estacionariedad, invertibilidad así como también a las funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial.

3.4.2) Estacionariedad.

En la Representación Mixta, $ARMA(K_1 K_2)$ tenemos dos partes constitutivas: autorregresiva $F(B)$ y media móvil $T(B)$.

Las condiciones de estacionariedad para la Media Móvil de orden finito, las conocemos ya desde 3.2.1) y lo mismo sucede con las correspondientes a la parte Autorregresiva en 3.3.1).

Por consiguiente las condiciones de estacionariedad de la Representación Mixta dependen exclusivamente del operador autorregresivo y es, por tanto, que las raíces de $F(B)=0$ estén situadas fuera del círculo de radio unidad.

3.4.3) Invertibilidad.

Las condiciones de invertibilidad para las componentes en Media Móvil y Autorregresiva se han explicitado en 3.2.2) y 3.3.2) respectivamente, y en ellas se ha visto que se requiere que las raíces del operador Media Móvil deben situarse fuera del círculo de radio unidad, mientras que para el autorregresivo no se impone condición ninguna.

Por tanto en las Representaciones Mixtas, la condición de invertibilidad se refiere, exclusivamente, a la Media Móvil y consiste en que las raíces de $T(B)$ estén fuera del círculo de radio unidad.

3.4.4) Función de autocorrelación.

Nuestra representación $ARMA(K_1 K_2)$ viene dada por: $F(B) x(t) = T(B) a_t$; multiplicando la expresión anterior por $x(t-k)$ y aplicando el operador esperan-

za matemática se obtiene:

$$\begin{aligned} E(x(t)x(t-k) - F_1 x(t-1)x(t-k) \dots - F_{k_1} x(t-k_1)x(t-k)) = \\ = E(a_t x(t-k) \dots - T_{k_2} a_{t-k_2} x(t-k)) \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(K) - F_1 \text{AUCOV}(K-1) \dots - F_{k_1} \text{AUCOV}(K-k_1) = \\ = \text{COV}_{a,x}(K) - T_1 \text{COV}_{a,x}(K-1) \dots - T_{k_2} \text{COV}_{a,x}(K-2) \end{aligned}$$

pero a través de la expresión relativa a la representación ARMA($K_1 K_2$) se deduce:

$$\begin{aligned} \text{COV}_{a,x}(k) &= 0 & \text{para } k > 0 \\ \text{COV}_{a,x}(k) &\neq 0 & \text{para } k \leq 0 \end{aligned}$$

por tanto la relación entre autovarianza y covarianza puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{AUCOV}(k) = F_1 \text{AUCOV}(k-1) + F_2 \text{AUCOV}(k-2) + \dots + \\ + F_{k_1} \text{AUCOV}(k-k_1) \quad ; \quad k > K_2 + 1 \end{aligned}$$

o bien a través de la función de autocorrelación:

$$R(k) = F_1 R(k-1) + F_2 R(k-2) + \dots + F_{k_1} R(k-k_1) \quad k > K_2 + 1$$

Es conveniente resaltar que para $k < K_2 + 1$, es decir para retardos iguales o menores que el orden del operador en Media Móvil, las autocovarianzas de $x(t)$ y las covarianzas entre a_t y $x(t)$ se relacionan con todos los parámetros $F_1 \dots F_{k_1}$; $T_1 \dots T_{k_2}$, pero para retardos mayores, las citadas varianzas y covarianzas, están relacionadas a través de la última ecuación en diferencias en las que sólo aparecen los K_1 coeficientes de la parte autorregresiva.

Además ~~(100)~~ si $k_2 - k_1$ es mayor que cero, la función de autocorrelación estará integrada por una combinación de exponenciales y funciones circulares atenuadas cuya forma exacta viene determinada por los coeficientes del operador autorregresivo y los valores iniciales.

Por el contrario si $k_2 - k_1$ es negativo, existirán $k_2 - k_1 + 1$ valores iniciales de la función de autocorrelación $R(k)$ que no seguirán este comportamiento anterior.

3.4.5) Función de autocorrelación parcial.

La Representación Mixta $ARMA(K_1, K_2)$ puede escribirse también de acuerdo con la siguiente expresión:

$$a_t = T^{-1}(B) F(B) x(t).$$

En general el operador $T^{-1}(B)$ contendrá infinitos términos, por lo cual también tendremos un número ilimitado de ellos para $x(t-k)$, por consiguiente la función de autocorrelación parcial será infinita y la forma concreta de la misma dependerá del producto $T^{-1}(B) F(B)$.

Por tanto la Representación Mixta tiene funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de infinitos términos. Ambas están configuradas por exponenciales y funciones circulares atenuadas a partir del retardo $K_2 - K_1$, para la primera, y $K_1 - K_2$ para la segunda.

3.4.6) La Representación Mixta ARMA (1,1)

Esta es la única mixta con que nos encontraremos en situaciones prácticas. Viene expresada por:

$$x(t) - F_1 x(t-1) = a_t - T_1 a_{t-1}$$

o sea,

$$(1 - F_1 B) x(t) = (1 - T_1 B) a_t$$

Estacionariedad: según 3.4.2) deberá verificarse:

$$-1 < F_1 < 1$$

Invertibilidad: de acuerdo con 3.4.3):

$$-1 < T_1 < 1$$

por consiguiente la zona permisible

$$-1 < F_1 < 1$$

$$-1 < T_1 < 1$$

Función de autocorrelación: deducimos a través del desarrollo de 3.4.4) que:

$$R(1) = \frac{(1 - F_1 T_1)(F_1 - T_1)}{1 + T_1^2 - 2F_1 T_1}$$

$$R(k) = F_1 R(k-1) \quad k \geq 2$$

por consiguiente vemos que la función de autocorrelación decae exponencialmente a partir de $R(1)$. De acuerdo con el signo de F_1 tendremos un decaimiento uniforme o alternado.

Función de autocorrelación parcial: de acuerdo con

3.4.5) vemos que ésta contiene infinitos términos, pero que en este caso concreto el primer valor es $R(1)$ estando los siguientes dominados por una exponencial atenuada en forma análoga a lo que sucede con la función de autocorrelación de una representación en Media Móvil de orden uno.

3.5) Espectros de las Representaciones.

Otra herramienta básica que utilizaremos profusamente es el espectro teórico y estimado de estas tres representaciones.

Explicitaremos el espectro teórico de las representaciones, que son teóricamente más adecuadas para ajustarse a los datos provenientes de variables económicas, puesto que más adelante los compararemos con los empíricos para identificar la representación idónea.

Por último recordemos que estas representaciones tienen la estructura de filtros y, por consiguiente, les son de aplicación lo descrito en 2.3.5).

3.5.1) Espectro de una Media Móvil.

Como ya sabemos la expresión matemática a la que se ajustan es: $x(t) = T(B) a_t$ siendo, $T(B)$, el operador en media móvil de orden K , por consiguiente:

$$S_x(w) = \left| \sum_{L=1}^K T_L e^{-jwL} \right|^2 S_a(w)$$

y puesto que a_t es aleatoria, con las propiedades que ya conocemos, le es de aplicación 2.3.6), y de acuerdo con ello:

$$g_a(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

por tanto:

$$g_x(w) = \left| \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{L=1}^k T_L e^{-jwL} \right|^2$$

y de acuerdo con la especificación concreta del operador, $T(B)$, así será la forma espectral.

Las Medias Móviles con que nos encontraremos, en este trabajo, serán siempre de orden inferior a dos, y dado que identificaremos la representación más adecuada en base a la comparación de espectros, necesitaremos conocer los espectros teóricos de MV(1) y MV(2).

a) MV(1)

$$x(t) = a_t - T_1 a_{t-1} = (1 - BT_1) a_t$$

$$g_x(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| (1 - T_1 e^{-jw}) \right|^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| (1 - T_1 e^{-jw})(1 - T_1 e^{jw}) \right|^2 =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + T_1^2 - T_1 e^{jw} - T_1 e^{-jw}) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + T_1^2 - T_1 \cos w - T_1 j \sin w - T_1 \cos w + T_1 j \sin w) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + T_1^2 - 2T_1 \cos w).$$

por tanto para MV(1) la expresión concreta de su espectro técnico es:

$$g_x(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + T_1^2 - 2T_1 \cos w).$$

Esta última expresión tiene los valores de T_1 limitados a su zona permisible y $g_x(w)$ tendrá una forma u otra de acuerdo con los valores de este parámetro.

Para facilitar nuestro trabajo hemos recogido en los gráficos de las figuras 3:1-6 las distintas formas resultantes normalizadas de acuerdo⁽²⁰⁾ con los siguientes valores del parámetro: T_1 : (-0,9; -0,5; -0,1; 0,1; 0,5; 0,9).

b) MV(2).

En forma análoga al anterior,

$$\begin{aligned} g_x(w) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} |(1 - T_1 e^{-jw} - T_2 e^{-2jw})|^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - T_1 e^{-jw} - T_2 e^{-2jw})(1 - T_1 e^{jw} - T_2 e^{2jw}) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - T_1 e^{-jw} - T_2 e^{-2jw} - T_1 e^{jw} + T_1^2 + T_1 T_2 e^{-jw} - \\ &\quad - (T_2 e^{+2jw} + T_1 T_2 e^{jw} + T_2^2)) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2T_1 \cos w - 2T_2 \cos 2w + T_1^2 + 2T_1 T_2 \cos w + T_2^2) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + T_1^2 + T_2^2 + 2T_1(T_2 - 1) \cos w - 2T_2 \cos 2w) \end{aligned}$$

estando esta expresión limitada a los valores permisibles de T_1 y T_2 .

También aquí hemos efectuado la representación

gráfica del espectro normalizado en las figuras 3:17-23, correspondientes a los siguientes valores de T_1 y T_2 ,

$$(T_1; T_2): (0; -0,8) (0; -0,4) (0; -0,3) (0; -0,9) \\ (0,1; 0,7) (-0,2; 0,6) (0,4; 0,3) (-0,4; -0,2) \\ (-1,1; -0,4) (0,4; -0,7) (-0,7; -0,7) (1,3; -0,8) \\ (-1,2; -0,8) (0,4; -0,9) (-0,2; -0,9) (1,6; -0,9) \\ (-1,6; -0,9).$$

3.5.2) Espectro de la Representación Autorregresiva.

En este caso tenemos: $F(B) x(t) = a_t$ siendo $F(B)$ de orden K .

Las relaciones espectrales vienen dadas por:

$$\left| \sum_{L=1}^K F_L e^{-j\omega L} \right|^2 \cdot g_x(\omega) = g_a(\omega)$$

por tanto,

$$g_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{\left| \sum_{L=1}^K F_L e^{-j\omega L} \right|^2}$$

En esta expresión anterior podemos observar la semejanza existente con la correspondiente a la Media Móvil.

Pasemos, a continuación, a desarrollar las expresiones concretas para los modelos AR(1) y AR(2) con los que nos encontraremos frecuentemente.

a) AR(1)

$$x(t) - F_1 x(t-1) = a_t$$

por tanto,

$$x(t) (1 - F_1 B) = a_t$$

y su espectro será:

$$g_x(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|(-1F_1 e^{-jw})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1+F_1^2 - 2F_1 \cos w)}$$

por razones análogas a a) en 3.5.1).

También aquí el parámetro F_1 está situado en la zona permisible,

y $\frac{2\pi g_x(w)}{\sigma^2}$ se ha representado de acuerdo con los valores de F_1 : (-0,9; -0,5; -0,1; 0,1; 0,5; 0,9) en las figuras 24-29.

b) AR(2)

Por razones similares tendremos:

$$\begin{aligned} g_x(w) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|(1 - F_1 e^{-jw} - F_2 e^{-2jw})|^2} = \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{(1 + F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(F_2 - 1)\cos w - 2F_2\cos 2w)} \end{aligned}$$

Una vez mas los parámetros F_1 y F_2 deben estar situados dentro de la zona permisible y $g_x(w)$ normalizado se ha representado en las figuras 30-55 para los valores de F_1 y F_2 siguientes:

$(F_1; F_2): (-1, 6; -0, 9)(-0, 2; -0, 9)(0, 4; -0, 9)(1, 6; -0, 9)$
 $(-1, 1; -0, 8)(0; -0, 8)(1, 3; -0, 8)$
 $(-0, 7; -0, 7)(0, 4; -0, 7)(0, 8; -0, 6)(1, 1; -0, 4)$
 $(-1, 1; -0, 4)(-0, 4; -0, 2)(0, 6; -0, 2)$
 $(-1; -0, 1)(1; 0, 1)(-0, 4; 0, 3)(-0, 2; 0, 6)$
 $(0; 0, 1)(0; 0, 3)(0; 0, 9)$
 $(0; -0, 4)(0; -0, 8)(0, 4; 0, 4)(0, 4; 0, 3)(0, 1; 0, 7)$

3.5.3) Espectro de la Representación Mixta.

Dada una Representación Mixta, ARMA($K_1 K_2$), se verifica: $F(B) x(t) = T(B) a_t$.

En estas condiciones la representación espectral se reduce a:

$$\left| \sum_{L=1}^{k_1} F_L e^{-j\omega L} \right|^2 g_x(\omega) = \left| \sum_{s=1}^{k_2} T_s e^{-j\omega s} \right|^2 g_a(\omega)$$

por tanto,

$$g_x(\omega) = \frac{\sigma^2 \left| \sum_{s=1}^{k_2} T_s e^{-j\omega s} \right|^2}{2\pi \left| \sum_{L=1}^{k_1} F_L e^{-j\omega L} \right|^2}$$

y dada la expresión anterior observamos que las expresiones correspondientes a 3.5.1) y 3.5.2) pueden obtenerse como casos particulares⁽²¹⁾ de ésta.

En los epígrafes anteriores hemos hecho referencia concreta a las representaciones prácticas más factibles y aquí también haremos lo mismo.

ARMA (1,1)

Explicitamente el modelo será:

$$x(t) - F_1 x(t-1) = a_t - T_1 a_{t-1}$$

y la relación espectral vendrá dada por:

$$g_x(w) = \frac{\sigma^2 |(1 - T_1 e^{-jw})|^2}{2\pi |(1 + F_1 e^{-jw})|^2} = \frac{\sigma^2 (1 + T_1^2 - 2T_1 \cos 2w)}{2\pi (1 + F_1^2 - 2F_1 \cos 2w)}$$

La expresión anterior está limitada a valores de T_1 y F_1 que estén situados dentro de la zona permisible.

Los valores normalizados de $g_x(w)$ para los distintos pares de valores de los parámetros, se han representado gráficamente en las figuras 3.56-64 para los siguientes valores de F_1 y T_1 .

$$(F_1; T_1): (-0,8; -0,4) (0,7; -0,6) (0,3; -0,8) (0,3; -0,3) \\ (0,3; 0,4) (0,3; 0,9) (-0,9; 0,8)$$

C A P I T U L O I V

Iniciamos el presente capítulo a través del análisis de la unicidad de las representaciones. A continuación introduciremos el problema de la identificación en el contexto de las Representaciones que utilizamos refiriendonos, en primer lugar, a los procedimientos habituales y pasando, después, a exponer un nuevo método para resolver el mismo problema basado en la comparación de los espectros teóricos con los estimados a partir de los datos de las series temporales.

El capítulo se complementa con epígrafes referentes a la reducción a estacionariedad de algunos tipos de series no estacionarias y la consideración de si debe introducirse una componente determinista dentro de la Representación.

4.1) Existencia de soluciones únicas.

Sabemos que un proceso estocástico gaussiano tiene una función de distribución conjunta, asociada con una realización del proceso, también Normal.

En estas condiciones el proceso está caracterizado, por completo, en base a los momentos de primer y segundo orden, es decir su media y varianza (y naturalmente su función de autocorrelación). Sin embargo debe recordarse que existen otros muchos procesos, no normales, que pueden tener la misma función de autocorrelación y que difieren en otras características.

Por tanto, y dado el énfasis que se pone en la función de autocorrelación para la identificación de las Representaciones susceptibles de reproducir dicha función, tendremos que asegurarnos de la normalidad del proceso para acotar las distintas Representaciones posibles.

Con relación a este aspecto anterior es posible afortunadamente⁽¹⁾, realizar transformaciones sobre la serie dada para conseguir normalidad, siendo una de las más utilizadas la transformación logarítmica.

Suponiendo, ahora, que el problema de la normalidad está resuelto vamos a demostrar que aunque existen diversas Representaciones compatibles con una función de autocorrelación dada, introduciendo las condiciones de estacionariedad, invertibilidad y parsimonia conseguiremos identificar soluciones únicas⁽²⁾.

Sabemos que una Representación ARMA (K_1, K_2) incluye como casos particulares la MV(K_1) y AR(K_2), por tanto efectuaremos la demostración para la Representación Mixta.

Supongamos, pues, que $x(t)$ sigue una ARMA(K_1, K_2):

$$F(B) x(t) = T(B) a_t$$

y escribiendo los operadores $F(B)$ y $T(B)$ en base a sus raíces tendremos:

$$(1-g_1B)(1-g_2B)\dots\dots(1-g_kB) x(t) = (1-h_1B)\dots(1-h_{k_2}B)a_t$$

verificandose que las raíces de ambas están fuera del círculo de radio unidad.

Llegados a este punto es conveniente trabajar con la función generadora de autocovarianza⁽³⁾.

Para $x(t)$ se tendrá:

$$C(B) = F(B)^{-1} F(F)^{-1} T(B) T(F) \sigma^2$$

es decir,

$$\frac{C(B)}{2} = (1-g_1 B)^{-1} \dots (1-g_{k_1} B)^{-1} (1-g_1 F)^{-1} (1-h_1 B) \dots$$

$$(1-h_{k_2} B) (1-h_1 F) \dots (1-h_{k_2} F).$$

y puesto que:

$$(1-h_j B)(1-h_j F) = 1 - h_j B - h_j F + h_j^2 = h_j^2 \left(\frac{1}{h_j^2} - \frac{1}{h_j} B - \frac{1}{h_j} F + 1 \right) =$$

$$= h_j^2 \left(1 - \frac{B}{h_j} \right) \left(1 - \frac{F}{h_j} \right).$$

Los modelos que a continuación expresamos:

$$\prod_{i=1}^{k_1} (1-g_i B) x(t) = k \prod_{j=1}^{k_2} (1-h_j^{\pm 1} B) a_t$$

pueden tener la misma estructura, en cuanto a sus autocovarianzas, siempre y cuando la constante k sea seleccionada en forma adecuada. Sin embargo si h_j está dentro del círculo de radio unidad, h_j^{-1} , estará fuera y, por tanto, si la Representación tiene que ser estacionaria e invertible sólo será viable una de ellas⁽⁴⁾.

Analogamente, se puede demostrar, que si en la función generadora de covarianzas se sustituye $(1-g_i F)$ o bien $(1-h_j B)$ por $(1-g_i B)$ o $(1-h_j F)$, res-

pectivamente, todos los modelos:

$$\prod_{i=1}^{k_1} (1-g_i B^{\pm 1}) x(t) = \prod_{j=1}^{k_2} (1-h_j B^{\pm 1}) a_t$$

tiene tambien una estructura idéntica, en cuanto a su función de autocovarianza se refiere.

Sin embargo las Representaciones que incluyen los términos $B^{-1}=F$ se refieren a los valores futuros de $x(t)$ y de a_t . Por tanto solo existe una representación que relacione los valores pasados de $x(t)$ a su valor actual.

Por último, podemos multiplicar el modelo $F(B)x(t)=T(B)a_t$, en ambos lados, por cualquier factor del tipo $(1-QB)$. El modelo así modificado tambien presentará la misma función generadora de autocovarianza que el modelo original pero, afortunadamente, este hecho no nos produce grandes problemas ya que seleccionaremos siempre la Representación más sencilla⁽⁵⁾.

Por consiguiente, existe una sola Representación que relacione los valores pasados y presentes de un proceso, $x(t)$ normal, que sea estacionaria, invertible y no contenga factores comunes.

Una vez que hemos visto que existen Representaciones únicas pasamos a afrontar, directamente, el problema de la Identificación.

4.2) El problema de la Identificación.

Este problema en el contexto de series temporales

y su modelización a través de Representaciones Mixtas⁽⁶⁾, tiene una significación diferente al problema, típicamente econométrico de Identificación. En Econometría este concepto hace referencia a la posibilidad de pasar unívocamente de estimaciones de los coeficientes en el Modelo Reducido, a las correspondientes del Modelo Estructural. En este trabajo el problema de identificar alude a la posibilidad de seleccionar, para la serie temporal en cuestión, una de las Representaciones.

Una vez conseguida la Identificación es cuando viene la segunda fase consistente en la estimación de los parámetros de la Representación identificada. Esta estimación consiste, en la mayor parte de los casos, en técnicas no lineales y nosotros la abordaremos en el siguiente capítulo.

A continuación nos ocuparemos de los distintos procedimientos de Identificación.

4.2.1) Identificación a través de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial.

Ya hemos visto a lo largo del anterior capítulo y concretamente en los epígrafes 3.2.3), 3.2.4) , 3.3.3), 3.3.4), 3.4.4) y 3.4.5) las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de las representaciones en Media Móvil, Autorregresiva y Mixta. De acuerdo con ellos se puede construir la siguiente tabla:

	Func. de autoc.	Func. de autoc. parcial
AR(k_1)	Infinitos términos: atenuación progresiva	k_1 términos diferentes de cero.
MV(k_2)	k_2 términos diferentes de cero.	Infinitos términos: atenuación progresiva.
ARMA($k_1 k_2$)	Infinitos términos: configurada por exponenciales y/o funciones circulares atenuadas a partir del retardo $k_2 - k_1$.	Infinitos términos: configurada por exponenciales y/o funciones circulares desde el retardo $k_1 - k_2$.

De acuerdo con la tabla anterior vemos que, teóricamente, el comportamiento de las dos funciones permite conocer de que tipo se trata. Este procedimiento es el que aconsejan Box-Jenkins y otros para proceder a seleccionar el modelo más adecuado.

En situaciones prácticas se procede con estimaciones de dichas funciones obtenidas a partir de los datos disponibles. A través del conocimiento de las respectivas desviaciones típicas, y suponiendo distribuciones Normales, podremos conocer si una cierta estimación es estadísticamente nula, lo cual nos permitirá conocer cual es el punto de corte adecuado. Para esta misión nos serán de gran utilidad las expresiones desarrolladas en la parte final de 2.2) en relación a la función de autocorrelación.

Por lo que respecta a la función de autocorrelación parcial, Quenouille⁽⁷⁾ demostró que si se verifica la hipótesis de que la serie es AR(k_1), las autocorrelaciones parciales estimadas de orden mayor o

igual a k_1+1 se distribuyen, aproximadamente, en forma independiente y con varianza:

$$\text{var}(F_{s,s}) \approx \frac{1}{n} \quad s \geq p+1$$

Este procedimiento de identificación se complementa con el test "Q" de Box y Pierce⁽⁸⁾ con el que se puede decidir si los diferentes coeficientes de autocorrelación, son conjuntamente, provenientes de una sucesión aleatoria.

4.2.2) Método de identificación de Stralkowski⁽⁹⁾.

Stralkowski y colaboradores llevan a cabo la identificación basándose en las dos funciones anteriores, pero complementandola en base a un análisis de simulación para comprobar si la representación seleccionada recoge fielmente las características del comportamiento de los datos originales.

En particular, de acuerdo con la estimación de la función de autocorrelación, calculan los parámetros de la representación seleccionada⁽¹⁰⁾. Una vez obtenidos éstos se procede a estimar las raíces de los operadores correspondientes y compararlas con las teóricas especificadas en los gráficos que aparecen en sus trabajos, para decidir si el comportamiento de la serie simulada se aproximará a la teórica.

Por último calculan la función de autocorrelación de los residuos estimados para comprobar que el modelo identificado es el adecuado.

4.3) Identificación a través de la comparación entre el espectro teórico de las Representaciones y, el estimado a partir de los datos.

A lo largo de este trabajo hemos hecho hincapié acerca de que la función de autocorrelación y el espectro proporcionan la misma información. Mientras que la primera se ha utilizado continuamente en la fase de identificación, la segunda, por lo que nosotros conocemos, no se ha empleado hasta ahora y es nuestro deseo mostrar como puede aprovecharse la información que suministra para proceder a la identificación de las Representaciones teóricas a las que ajustar los datos de las series temporales.

Por otra parte, se sabe, que el espectro tiene propiedades muestrales más sencillas y fiables que las correspondientes para la función de autocorrelación y, por tanto parece sensato, explotar al máximo de nuestras posibilidades la potencialidad de la función espectral.

En relación con lo anterior, se verá en la segunda parte del trabajo, las dificultades que aparecen con identificando en base a las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, y al mismo tiempo la simplicidad que se consigue con nuestro procedimiento.

El procedimiento que apuntamos lo presentamos aquí con una limitación que juzgamos no significativa. Esta se refiere a que de acuerdo con diversos autores como Box-Jenkins, Stralkowski, Naylor⁽¹¹⁾, etc.

en situaciones prácticas, la mayor parte de los modelos que son candidatos para describir adecuadamente las series de que disponemos se limitan a Medias Móviles, Representaciones Autorregresivas de primer y segundo orden, así como también la Mixta ARMA(1,1), es decir:

MV(1); MV(2)

AR(1); AR(2)

ARMA(1,1)

Decimos que no es significativa esta limitación puesto que para los casos especiales en que se necesitaran Representaciones de mayor orden, nuestro procedimiento puede ser ampliado con facilidad siguiendo las mismas pautas.

Por otra parte debe destacarse que las series que utilizaremos no presentan picos espectrales reveladores de estacionalidad⁽¹²⁾. El procedimiento que proponemos consta de varias fases que pasamos a describir.

- a) A partir de la serie original, $x(t)$, se calcula su función espectral con el número de ordenadas adecuado, al de datos disponibles.
- b) Una vez obtenida la estimación del espectro, se pasa a comparar su forma con la de los espectros normalizados de las cinco Representaciones seleccionadas. Estos espectros están recogidos en los gráficos 1-64. A través de esta comparación seleccionamos un reducido número de Representaciones adecuadas.
- c) Lo realizado hasta aquí sirve para tener una primera idea de la Representación más idónea, pero

para asegurarnos hay que tener en cuenta que deben estar de acuerdo los espectros teóricos y estimados no sólo en cuanto a su forma sino también en cuanto a sus magnitudes.

Por tanto habrá que normalizar el espectro real, y dado que la expresión de éste viene dada por⁽¹³⁾:

$\frac{\pi g_x(w)}{\sigma^2}$ donde σ^2 es la varianza de a_t , necesitaremos obtener una estimación de esta varianza.

La expresión de la varianza residual, σ^2 , es diferente según sea la Representación adecuada, por tanto, la identificación inicial de la fase b) nos situará en condiciones de estimar dicha varianza.

La varianza residual viene dada por

1) MV(s)

$$x(t) = T(B) a_t$$

$$\text{aucov}(k) = E (a_t - T_1 a_{t-1} \dots - T_s a_{t-s}) (a_{t+k} - T_1 a_{t+k-1} \dots - T_s a_{t-s+k})$$

por tanto se tiene:

$$\text{VAR } x(t) = \text{AUCOV}(0) = (1 + T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_s^2) \sigma^2$$

es decir,

$$\sigma^2 = \frac{\text{AUCOV}(0)}{1 + T_1^2 + \dots + T_s^2}$$

En estas condiciones una estimación de σ^2 vendrá dada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{aucov}(0)}{1 + t_1^2 + \dots + t_s^2}$$

donde las letras minúsculas indican estimaciones de las correspondientes mayúsculas.

Debemos destacar aquí que la estimación de la autocovarianza o covarianza de la serie $x(t)$, la conocemos directamente puesto que la mayoría de los programas de ordenador que calculan el espectro incluyen, entre la información que suministran, las diferentes autocovarianzas. Por lo que respecta a las estimaciones de los parámetros del operador de Media Móvil, éstas serán explicitadas en el siguiente capítulo.

2) AR(s)

$$F(B) x(t) = a_t$$

$$\text{AUCOV}(k) = E (a_t - F_1 x(t-1) \dots - F_s x(t-s) \\ (a_{t+k} - F_1 x(t+k-1) \dots - F_s x(t+k-s))$$

y si hacemos $k=0$

$$\text{AUCOV}(0) = F_1 \text{AUCOV}(1) + F_2 \text{AUCOV}(2) + \dots + F_s \text{AUCOV}(s) + \sigma^2$$

por tanto,

$$\sigma^2 = \text{AUCOV}(0) (1 - F_1 R(1) - F_2 R(2) \dots - F_s R(s))$$

y la estimación de la varianza vendrá expresada por:

$$\sigma^2 = \text{aucov}(0) (1 - f_1 r(1) - f_2 r(2) \dots - f_s r(s))$$

También aquí, la estimación de los parámetros será llevada a cabo en el capítulo siguiente.

3) ARMA(1,1)

La forma de la estimación de la varianza de a_t para una Representación Mixta es bastante complicada y su desarrollo puede encontrarse en Box-Jenkins.

Concretamente para ARMA(1,1) se tiene:

$$\sigma^2 = \frac{1-F_1^2}{1+T_1^2-2F_1T_1} \text{ AUCOV}(o)$$

por tanto:

$$c^2 = \frac{1-f_1^2}{1+t_1^2-2f_1t_1} \text{ aucov}(o)$$

Recordemos una vez más, que la estimación de los parámetros se llevará a cabo en el próximo capítulo.

Una vez que ya tenemos una estimación de σ^2 , podremos pasar a la cuarta fase.

- d) Consiste ésta, en calcular los siguientes coeficientes:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}}$$

es decir, calculamos la relación entre la ordenada máxima y mínima en el espectro estimado y en el normalizado⁽¹⁴⁾.

$$\frac{n g(w)}{\sigma^2} \quad \text{max} = g(w) \text{ nor max}$$

$$\frac{n g(w)}{\sigma^2} \quad \text{min} = g(w) \text{ nor min}$$

Estos tres coeficientes se calculan tanto para el espectro teórico normalizado de la representación inicialmente identificada, como para el estimado a partir de los datos, y se comprueba que son adecuados.

- e) A continuación se verifica la coincidencia de otras características para uno y otro espectro.

Un ejemplo de esto último es la coincidencia de los máximos y mínimos, así como de su explicación teórica para asegurarnos por lo que respecta al espectro estimado, que su aparición no se debe a fluctuaciones aleatorias.

Una vez finalizada la fase e) tenemos ya identificada la Representación adecuada y como suponemos que el proceso es Normal, entonces sólo existe una Representación.

En situaciones prácticas, sin embargo, puede parecer que por la forma del espectro podrían identificarse varias formas posibles. Esta situación puede resolverse en primer lugar, estudiando con más detalle la forma del espectro⁽¹⁵⁾ y las dimensiones de los mismos. Si lo anterior no da resultado se acude a la representación gráfica donde se relacionan los coeficientes de autocorrelación de primer y segundo orden con los valores de los parámetros del operador autorregresivo o de Média Móvil⁽¹⁶⁾.

En caso de no poder hallar valores simultáneos para los dos tipos de Representaciones, el problema de la identificación se habrá resuelto pero si existen dos identificaciones compatibles, por ejemplo: AR(2) y MV(2), significa que a través de la inversión deberá poderse pasar de una a otra y, por tanto, se podrán establecer relaciones entre los parámetros Autorregresivos y los de Media Móvil.

Por último si continua existiendo duda habrá que recurrir a la representación gráfica de los espectros de cada una de las estructuras posibles y

ver cual reproduce mejor el espectro real.

En resumen: se calcula el espectro estimado y a continuación, por comparación, se lleva a cabo la identificación inicial que en la fase siguiente permitirá calcular la varianza de a_t . El conocimiento de esta varianza permite normalizar el espectro y por tanto efectuar comparaciones cuantitativas con el teórico en base a los coeficientes citados. Por último se comprueba el resto de las características.

En caso de que la identificación inicial lleve a seleccionar más de una Representación con el concurso de las restantes fases c), d) y e) podremos seleccionar la más idónea.

4.3.1) Ejemplo de Identificación a través de la comparación entre los espectros teóricos estimados.

Supongamos que sabemos que el espectro de una serie estacionaria, $x(t)$, viene representado en el gráfico nº (4-1) de la página ^{Siguiente} ~~797~~, estando calculado para diez puntos.

Una vez que hemos visto la forma, conviene observar que la relación entre las ordenadas máxima y mínima es:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}} \approx \frac{60}{2} = 30$$

con la información proporcionada por la forma y la relación anteriormente calculada, pasamos a buscar

$g(\omega)$

$$\Gamma(1) = -0.4$$

$$\Gamma(2) = -0.3$$

$$C_0 = 55.8$$

60

55

50

45

40

35

30

25

20

15

10

5

0.4π

0.2π

0.3π

0.4π

0.5π

0.6π

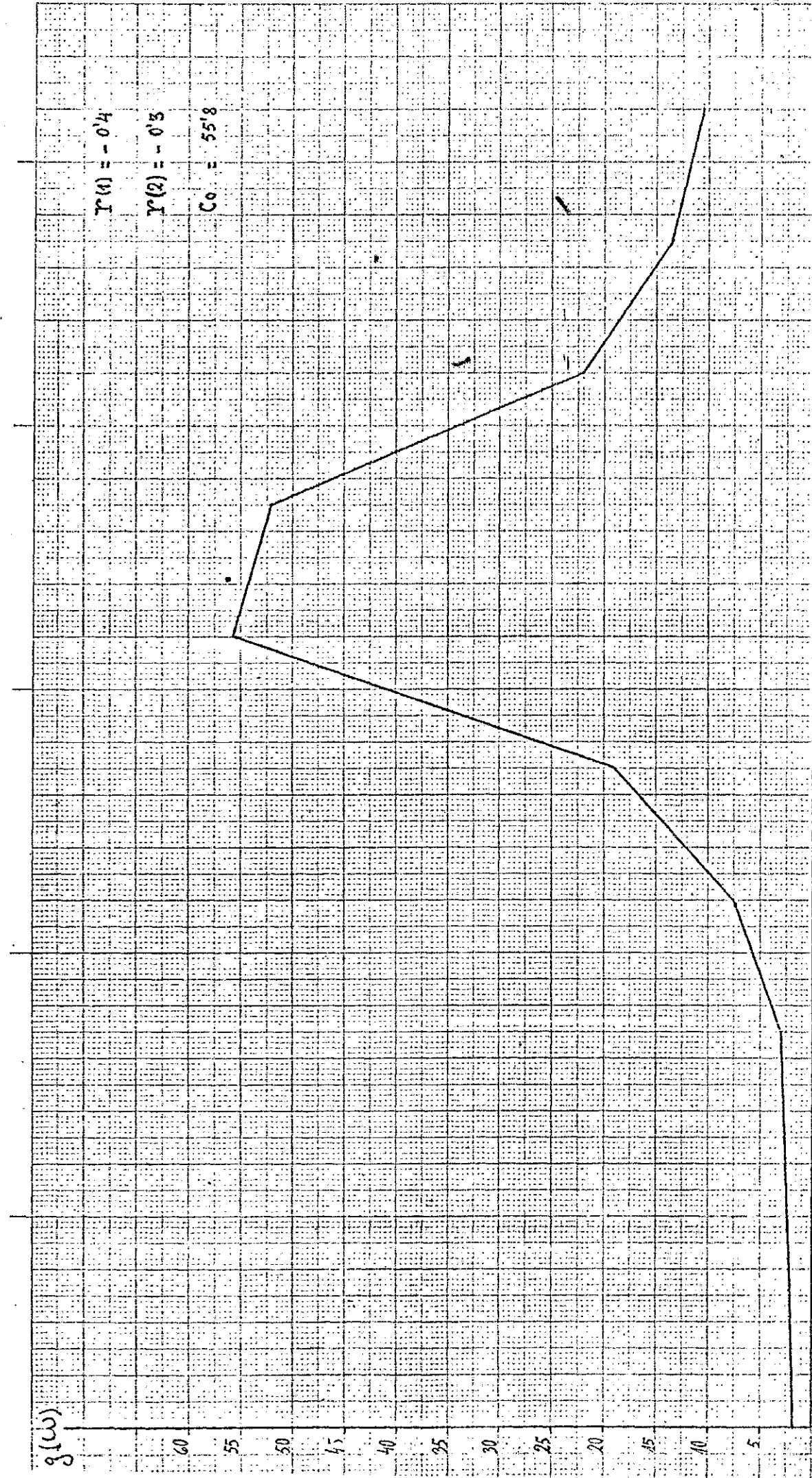
0.7π

0.8π

0.9π

π

3



entre los espectros teóricos aquél o aquellos que más se le parece, es decir la Identificación inicial.

A través de lo anteriormente expuesto, parece evidente que no estamos en presencia ni de una Representación Autorregresiva, ni Media Móvil de primer orden, puesto que la forma de los espectros no coincide con la de la figura. Esto es debido a que las Representaciones anteriores no pueden reproducir el pico que aparece centrado en la frecuencia $f = 0.67$.

Lo mismo sucede con la Representación Mixta ARMA (1,1), puesto que tampoco facilita la aparición del pico intermedio y en especial por lo que se refiere a su reducido ancho de banda⁽¹⁷⁾.

Por consiguiente quedan como representaciones aceptables AR(2) y MV(2).

Investiguemos con más detalle si es plausible una Representación AR(2).

Los coeficientes de autocorrelación de primer y segundo orden los conocemos como datos:

$$r(1)=0.4 \quad r(2)=0.3$$

Con esta información y la recogida en el gráfico nº (5-1), que se analizará en el capítulo siguiente, calculamos las estimaciones de F_1 y F_2 , que resultan ser:

$$F_1 \approx -0.62 \quad F_2 \approx -0.55$$

Debe destacarse aquí, que a través de la comparación del espectro vemos que el teórico AR(2) con

parámetros $(-0,7;-0,7)$ presenta una forma muy similar a la del ejemplo, y que además el máximo aparece, también, centrado alrededor de $f=0.6\pi$ radianes, por tanto se refuerza la idea de que la identificación corresponderá a un AR(2) con parámetros $(-0.62; -0.55)$.

A continuación debemos comprobar que los valores máximo y mínimo de las ordenadas espectrales están dentro de lo permisible, puesto que nuestro espectro varía entre 2 y 60 y el teórico que se le aproxima lo hace entre 0.5 y 14. Para ello calculamos una estimación de la varianza de a_t , que de acuerdo con 4.3) será:

$$\sigma^2 = c_0(1-f_1^2-f_2^2) r(2)$$

c_0 la conocemos como dato previo y tiene un valor de: $c_0 = 55.8$.

Por tanto:

$$\sigma^2 = 55,8(1-0,62^2-0,4-0,55^2 \cdot 0,3) \simeq 32,76$$

es decir,

$$\frac{\sigma^2}{n} = 32,76 \simeq 10,42$$

$$g(w) \text{ max nor} = \frac{60}{10,42} \simeq 5,76$$

$$g(w) \text{ min nor} = \frac{2}{10,42} \simeq 0,19$$

lo cual indica que no nos apartamos de los valores razonables,

Si para mayor seguridad calculamos el espectro teórico que corresponde a una Representación AR(2) con parámetros $(-0,62; -0,55)$ vemos que:

El máximo se calcula a partir de la expresión correspondiente al espectro teórico:

$$g(w)_{\text{nor}} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w}$$

$$\frac{dg(w)}{dw} = - \frac{-2f_1(f_2-1)\sin w + 4f_2 \sin 2w}{(\quad)^2} = 0$$

es decir,

$$f_1(f_2-1) \sin w = 2f_2 \sin 2w = 4f_2 \sin w \cos w$$

por tanto $w = \arccos \frac{f_1(f_2-1)}{4-f_2}$, y en nuestro caso,

$$w = \arccos \frac{-0,62(-0,55-1)}{4(-0,55)} = 2,02 \text{ radianes,}$$

correspondientes a una oscilación de 3,1 meses aproximadamente, que coincide razonablemente con la del ejemplo.

Calculemos, a continuación, las ordenadas máxima y mínima del espectro teórico.

$$g(w)_{\text{nor}} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w}$$

por tanto:

$$g(w) \text{ nor max} = \frac{1}{1+0,62^2+0,55^2+2(-0,62)(-0,55-1)}$$

$$\frac{1}{\cos 2,02+2.0,55 \cos 2.2,02} \simeq 5,984$$

$$g(w) \text{ nor min} = \frac{1}{1+0,62^2+0,55^2+2.0,62(0,55+1)+2.0,55} \simeq 0,21$$

valores que se aproximan mucho a los estimados.

Para terminar la identificación, vemos que el espectro no se asemeja al correspondiente a una MV(2) puesto que aquí el pico que presentan tiene un aspecto más suave, lo cual corresponde a un mayor ancho de banda.

No obstante si quisieramos forzar la situación, identificando el ejemplo como una MV(2), a la hora de calcular los parámetros (t_1, t_2) , mediante el gráfico nº 5-5 que será explicado en el próximo capítulo veríamos que no hay posibilidad de seleccionar tales valores.

Por consiguiente el ejemplo propuesto se identifica como una Representación Autorregresiva de segundo orden con parámetros: $f_1 \simeq -0,62$ $f_2 \simeq -0,55$, es decir, $(1+0,62B+0,55B^2) x(t) = a_t$.

4.4) Reducción de una serie no estacionaria a otra que lo sea.

Hasta ahora todos los resultados que hemos obte-

nido se refieren a series estacionarias, en el sentido que venimos utilizando. En situaciones reales esta hipótesis no se verifica casi nunca puesto que en las series de que disponemos se observan tendencias que afectan tanto a los momentos de primer y segundo orden. Por consiguiente se hace necesario tratarlas para reducirlas a estacionariedad, y poderles aplicar toda la metodología anterior. Por tanto, en este epígrafe, clasificaremos en primer lugar las series según su no estacionariedad y a continuación desarrollaremos un procedimiento sencillo por el cual conseguiremos estacionariedad en las series.

Jenkins y Watts⁽¹⁸⁾ clasifican las series temporales de acuerdo con el siguiente criterio:

- 1) series que son estacionarias durante períodos de tiempo relativamente grandes, debido a la existencia de mecanismos de control que actúan sobre los procesos que generan la serie.
- 2) series que son estacionarias durante períodos de tiempo reducidos.
- 3) series que no son estacionarias, conocimiento que se puede derivar de su inspección visual o bien a través de información apriorística, etc.

A su vez las series no estacionarias pueden subclasificarse en:

- 3a) valor medio de la serie no estacionario.
- 3b) valor medio y varianza no estacionarios.

La mayor parte de las series que nos encontramos en situaciones prácticas son de los tipos 3a) y 3b), y es para este tipo de no estacionariedad para

el que Box y Jenkins⁽¹⁹⁾ propusieron un procedimiento muy sencillo que les permite convertir en estacionarias series que comentamos.

A continuación pasamos, pues, a exponer el citado procedimiento que va a consistir en tomar las diferencias sucesivas de la serie original hasta que aparezca como estacionaria.

Recordemos que para que una Representación Mixta sea estacionaria e invertible requiere que las raíces de los operadores Autorregresivo y Media Móvil estén situados fuera del círculo de radio unidad. Si alguna de las raíces de $F(B)$ está dentro se observa que el comportamiento de la serie es prácticamente exponencial, por tanto si queremos conseguir una no estacionariedad que se asemeje a las situaciones reales la única posibilidad que resta es que ésta esté sobre el círculo de radio unidad o infinitamente próxima a él. Por consiguiente, y admitiendo cierto grado de simplificación, la no estacionariedad con que nos enfrentamos deriva de que existen alguna o algunas raíces con modelo igual a la unidad.

En estas circunstancias el operador Autorregresivo $F(B)$, que es de grado k_1 , puede escribirse como:

$$F(B) = F'(B)(1-B)^d$$

donde $-F'(B)$ es otro polinomio en B de grado $k_1 - d = k_2$, estando todas sus raíces situadas fuera del círculo de radio unidad.

$-d$ es el orden de multiplicidad de las series

de módulo unidad. $(1-B)^d$ equivale a tomar las d -diferencias de $x(t)$.

Si ahora nos referimos a $x(t)$ y a la posibilidad de que ésta no sea estacionaria tendremos:

$$\begin{aligned} F(B) x(t) &= T(B) a_t \\ F'(B)(1-B)^d x(t) &= T(B) a_t \end{aligned}$$

A este tipo de Representación es al que Box y Jenkins⁽²⁰⁾, Naylor⁽²¹⁾, etc., la denominan ARIMA (k_3, d, k_2) , siendo k_3 el grado del operador autorregresivo estacionario, d el número de raíces unitarias del operador autorregresivo general $F(B)$ y, k_2 , el grado del operador de Media Móvil.

Nosotros, en esta tesis, preferimos guardar la terminología original, simplemente especificaremos que una ARMA(k_1, k_2) dada, se refiere a las diferencias de orden cero, uno, dos, etc., de la serie original $x(t)$.

4.4.1) Función de autocorrelación de una serie no estacionaria.

Hasta ahora hemos visto como las series no estacionarias que aparecen en Economía, al no tener carácter explosivo, pueden reducirse a estacionariedad mediante el calculo de sus diferencias sucesivas.

Ahora, es conveniente ver lo que sucede con la función de autocorrelación en caso de que la variable no sea estacionaria. Esto nos servirá para identificar el grado de las diferencias sucesivas que debemos calcular sobre $x(t)$ para que no sea estacionaria.

Si la variable $x(t)$ sigue una $\text{ARMA}(k_1, k_2)$, ya hemos dicho en 3.4.4) que se verifica:

$$F(B) R(k) = 0 \quad k > k_2$$

y si desarrollamos $F(B)$ de acuerdo con sus raíces:

$$F(B) = (1 - g_1 B)(1 - g_2 B) \dots (1 - g_{k_1} B)$$

y si se cumplen las condiciones de estacionariedad, se puede escribir:

$$R(k) = A_1 g_1^k + A_2 g_2^k + \dots + A_{k_1} g_{k_1}^k \quad k > k_2 - k_1$$

que al ser $|g_i| < 1$ implicaran que para k elevado $R(k)$ tenderá a cero.

Si por el contrario una de las raíces, g_i^{-1} , está próxima al círculo de radio unidad $g_i = 1 - h$ y para k suficientemente grande se verificará:

$$R(k) \simeq A_i g_i^k = A_i (1 - h)^k \simeq A_i (1 - kh)$$

con lo que vemos que la función de autocorrelación no se atenúa rápidamente, sino que por el contrario tendrá un decaimiento suave y prácticamente lineal. Por tanto siempre que nos encontremos con una serie cuya función de autocorrelación no se atenúa rápidamente y que parece tener una tendencia lineal, le calcularemos las diferencias sucesivas hasta que la función de autocorrelación tenga un comportamiento similar al de una variable estacionaria. Afortunadamente, en situaciones prácticas, el grado de las diferencias sucesivas rara vez será superior a dos.

4.5) Análisis para decidir si debe incorporarse una tendencia determinada.

En algunos casos concretos⁽²²⁾ puede existir la necesidad de que nuestras Representaciones sean capaces de reproducir tendencias de tipo determinista que aparezcan en $x(t)$, para ello lo primero que habría que hacer sería decidir si éstas deben ser incorporadas en aquéllas y en segundo lugar, la forma concreta de tal tendencia, pero aquí y por comodidad expositiva invertiremos el orden.

Si en lugar de formular el modelo:

$$F'(B) (1-B)^d x(t) = T(B) a_t$$

especificamos:

$$F'(B) (1-B)^d x(t) = T_0 + T(B) a_t$$

veremos como mediante la incorporación de la constante, T_0 , podremos incluir en la Representación funciones deterministas dependientes del tiempo.

Comprobemoslo. Si suponemos que $x(t)$ incluye una función de tipo polinómico se tendrá:

$$x(t) = a t^d + b t^{d-1} + \dots + c + x'(t)$$

$$x(t-1) = a(t-1)^d + b(t-1)^{d-1} + \dots + c + x'(t-1)$$

$$\nabla x(t) = x(t) - x(t-1) = b t^{d-1} + \dots + x'(t) - x'(t-1)$$

por tanto, observamos, que al tomar la primera diferencia hemos rebajado en una unidad el grado del polinomio.

Por consiguiente:

$$\nabla^d x(t) = c t^e + \nabla^d x'(t)$$

Nótese que en el desarrollo anterior hemos supuesto que $a, b, \dots, a', b', \dots$ son constantes y que la variable $x'(t)$ es el resultado de eliminar la componente determinista.

Si aplicamos, a continuación, el operador Esperanza Matemática, $E(\quad)$, a la expresión anterior tendremos:

$$E(\nabla^d x(t)) = cT^e + E(\nabla^d x'(t)) = cr^e$$

es decir, necesitaremos decidir acerca de si la media de las diferencias de orden, d , de la variable primitiva $x(t)$ es diferente de cero, ya que así veremos si el modelo debe incorporar tendencias deterministas de tipo polinómico.

Nótese que si se especifica:

$$F'(B)(1-B)^d x(t) = T_0 + T(B) a_t$$

resulta,

$$(1-B)^d x(t) = T_0 F'(B)^{-1} + T(B) F'(B)^{-1} a_t$$

y aplicando el operador $E(\quad)$, tendremos:

$$E((1-B)^d x(t)) = \frac{T_0}{1-F_1-F_2-\dots-F_k}$$

En la mayoría de las aplicaciones prácticas es más plausible la existencia de una tendencia de tipo estocástico, como las discutidas en 4.4), que una de tipo determinista, por tanto, siempre que no sea evidente la existencia de T_0 , ésta será ignorada.

Para llevar a cabo esta decisión se calcula la media muestral de $x(t)$, o de sus diferencias sucesivas hasta conseguir estacionariedad, es decir:

$$m = \frac{\sum x(t)}{n}$$

donde n es el número de observaciones disponibles y una vez calculada la media muestral la comparamos con su error típico.

Este error típico está resumido en la tabla adjunta para las Representaciones que, de hecho, utilizamos.

ARMA (k_1 k_2)	error típico
(1,0)	$\left(\frac{c_o(1+R(1))}{N(1-r(1))} \right)^{\frac{1}{2}}$
(0,1)	$\left(\frac{c_o(1+2R(1))}{N} \right)^{\frac{1}{2}}$
(2,0)	$\left(\frac{c_o(1+R(1))(1-2R(1)^2 + R(2))}{n(1-R(1))(1-R(2))} \right)^{\frac{1}{2}}$
(0,2)	$\left(\frac{c_o(1+2(1))+2R(2)}{N} \right)^{\frac{1}{2}}$
(1,1)	$\left(\frac{c_o}{N} \left(1 + \frac{2R(1)}{R(1)-R(2)} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$

En las expresiones anteriores se sustituirá cada coeficiente de autocorrelación por su respectiva estimación, así como también la correspondiente a c_o .

Una vez que ya tenemos identificada la Representación debemos abordar el problema de la estimación de los parámetros que cada una de las Representaciones involucra, para ello pasamos al capítulo siguiente.

C A P Í T U L O V

E s t i m a c i ó n .

Los problemas de estimación⁽¹⁾ relacionados con las Representaciones Mixtas, ARMA(k_1, k_2), comenzaron a tratarse en forma sistemática en fecha tan reciente como 1.970, por Box y Jenkins⁽²⁾ y, por consiguiente, no se puede considerar como problema resuelto por completo. A mantener este juicio contribuyen los artículos de Charles Nelson⁽³⁾, referente a la Representación MV(1), y los ya citados artículos de Aibner Stralkowski sobre las Representaciones AR(1), AR(2), MV(1), MV(2) y ARMA(1,1), publicados dos de ellos en 1.974.

En este capítulo abordaremos, en primer lugar⁽⁴⁾, algunos aspectos de los problemas de la estimación teórica, centrándonos en el procedimiento de máxima verosimilitud, mientras que en la segunda parte lo haremos en los métodos de estimación aproximada, puestos a punto por Stralkowski y colaboradores, para la estimación de los parámetros en las Representaciones con que nos enfrentaremos en situaciones reales. Para el grado de aproximación que nos hemos propuesto, los métodos aproximados, no nos impedirán conseguir estimaciones razonables dado que el tamaño de la muestra así nos lo permitirá.

5-1) Estimadores de máxima verosimilitud

Dado un conjunto de variables aleatorias, $x(t)$, $x(2)$, $x(n)$, la función de verosimilitud, es la función de densidad conjunta de las n variables, es decir:

$$f(A): x(1), x(2) \dots x(n) = L(A:x)$$

La función de verosimilitud es también dependiente del conjunto de parámetros, A , que como caso particular puede reducirse a uno sólo.

Esta función indica la verosimilitud relativa de que las n variables aleatorias tomen los valores $x(1)$, $x(2)$ $x(n)$. En estas condiciones el principio de máxima verosimilitud dice que, si las variables $x(1)$, $x(2)$ $x(n)$, han tomado los valores $x'(1)$, $x'(2)$ $x'(n)$, el valor de los parámetros A , más verosímil, es aquél que maximiza la función de verosimilitud.

Por tanto si aplicamos este principio a nuestro modelo ARMA($k_1 k_2$):

$$1) \quad F(B) x(t) = T(B) a_t$$

que puede reescribirse como:

$$2) \quad a_t = T^{-1}(B) F(B) x(t)$$

Y si suponemos, una vez más, que a_t se distribuye Normalmente, su función de verosimilitud será:

$$3) \quad L(A:x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{N}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^N a_t^2} (A:x)$$

d

donde si explicitamos el conjunto de los k_1 parámetros autocorregresivos por F y por T los k_2 del correspondiente operador de Media Móvil podremos escribir:

$$L(A:x) = L(F,T:x)$$

y como vemos, la función de verosimilitud es condicional a $x(t)$ ($t:N, N-L, \dots$).

Tomando el logaritmo de la función anterior y designando por:

$$s(F,T:x) = \sum_{t=1}^N a_t^2(F,T:x)$$

tendremos:

$$4) \quad \ell(F,T:x) = \frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{N}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} S(F,T:x)$$

Las propiedades generales de los estimadores de máxima verosimilitud para la función explicitada en 4) se conocen a través de los trabajos de Whittle^(c) y Walker^(b).

Una vez que hemos explicitado la función de verosimilitud de la Representación ARMA($k_1 k_2$) abordaremos el problema concreto de estimar los parámetros.

5.1.1) Búsqueda sobre el espacio de los parámetros.

Este primer procedimiento estriba en escribir el modelo ARMA($k_1 k_2$) de la siguiente manera:

$$5) \quad a_t = T_1 a_{t-1} - \dots - T_{k_2} a_{t-k_2} + x(t) - F_1 x(t-1) - \dots - F_{k_1} x(t-k_1)$$

y consiste, básicamente, en minimizar $s(F, T; x)$ a través de un proceso de búsqueda sobre el espacio de los parámetros.

Dados los parámetros, a_t , se puede calcular mediante la utilización de $x(t), x(t-1) \dots x(t-k_1)$, y de los valores $a_{t-1}, a_{t-2} \dots$ previamente calculados.

En este procedimiento se plantea el problema de decidir como debemos iniciar el proceso. Para resolverlo Box y Jenkins ofrecen dos soluciones. La primera consiste en tomar los distintos valores de a_{t-1}, a_{t-2} , etc., igualados a cero, y comenzando los cálculos con aquel a_t para el que se disponen todos los datos. También indican que el procedimiento "ad-hoc" de igualar a cero los a_{t-j} es muy útil para modelos de tipo no estacional. Para esta solución Whittle⁽⁷⁾ demostró que proporciona las estimaciones de máxima verosimilitud. La segunda radica en la predicción hacia atrás de los valores $x(t-j)$ y a_{t-j} que hagan falta. En relación con esta segunda modalidad demuestran, además, que utilizando estas predicciones se consiguen los estimadores verdaderos de máxima verosimilitud que se obtendrían si las $x(t-j)$ a utilizar se trataran explícitamente como parámetros para maximizar la función de verosimilitud.

Un aspecto de gran interés, relacionado con la estimación es la explicitación de zonas de confianza para las estimaciones. A través de un conocido resultado asintótico⁽⁸⁾ se tiene que:

$$- 2 \ln \left(\frac{L(F_1 T; x)}{L(f_1 t; x)} \right)$$

se distribuyen de acuerdo con una χ_k^2 , siendo $k=k_1+k_2$ el número de grados de libertad, \ln , indica logaritmo neperiano, y (f,t) son estimaciones de (F,T) respectivamente.

Por tanto podremos establecer zonas de confianza para el conjunto de los estimadores (excluyendo los parámetros de perturbación).

Para ello definimos $\ell(F,T:x)$ de acuerdo con:

$$\ell(F,T:x) = \log L(F,T:x)$$

se tendrá que:

$$\ell(f,t:x) - \ell(F,T:x) \sim \frac{1}{2} \chi_k^2$$

o bien,

$$7) \text{Prob.} \{ \ell(f,t:x) - \frac{1}{2} \chi_{k_1}^2 \leq \ell(F,T:x) \} = 1 - \alpha$$

que será el correspondiente intervalo de confianza asintótico de $\ell(F,T:x)$, a partir del cual se obtiene la zona conjunta $(1-\alpha)$ de los coeficientes:

$$(F_1 \dots F_{k_1}, T_1 \dots T_{k_2}).$$

Alternativamente b) puede escribirse en función de $S(F,T:x)$ como:

$$b') \quad S(F,T:x) - S(f,t:x) \sim \sigma^2 \frac{1}{2} \chi_k^2.$$

Además, en el caso de que a_t sea una función lineal de los parámetros (F,T) , como sucederá con las Representaciones Autorregresivas, sabemos que:

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{s(f,t:x)}{N-k} \sim \frac{\chi_{(N-k)}^2}{N-k}$$

y por tanto se puede formar el cociente:

$$7) \quad F_{k_t(N-k)} = \frac{\chi^2_{k/k}}{\chi^2_{(n+k)/N-k}} = \frac{(S(F,T:x) - s(f,t:x)) / \sigma^2_k}{\frac{S(f,t:x)}{\sigma^2(N-k)}}$$

es decir,

$$F_{k_1(N-k)} = \left(\frac{S(F,T:x)}{s(f,t:x)} - 1 \right) \left(\frac{N-k}{k} \right)$$

o bien,

$$8) \quad \left(1 + \frac{k F_{k_1(N-k)}}{N-k} \right) s(f,t:x) = S(F,T:x)$$

que constituyen la base para un procedimiento alternativo para el cálculo de una zona o región de confianza.

La expresión anterior 8), en situaciones prácticas, es solo aproximada ya que no existe, en general, linealidad entre a_t y los parámetros (F,T) .

Para el cálculo de la varianza de las estimaciones de los distintos parámetros, se necesita conocer exactamente la forma de $(F,T:x)$, cosa que normalmente no sucede, a excepción de los modelos puramente Auto-regresivos.

En todo caso se debería calcular:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{A}} &= \left[\frac{\partial^2 \ell(F,T:x)}{\partial A_i \partial A_j : A=\hat{A}} \right]^{-1} = \\ &= 2 \sigma^2 \left[\frac{\partial^2 S(F,T/x)}{\partial A_i \partial A_j : A=\hat{A}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

siendo en este caso $A = [F_1 T']^1$.

5.1.2) Linearización

Veamos ahora otro procedimiento de cálculo de los parámetros.

Recordemos que en la representación ARMA(k_1, k_2) se puede escribir:

$$a_t = T^{-1}(B) F(B) x(t) = f(A:x)$$

representando A el conjunto de los $k_1 k_2$ parámetros.

Si ahora suponemos que las observaciones sobre $x(t)$ son fijas podremos considerar a la expresión anterior como una función de los parámetros, y por tanto, podremos expandir ésta en serie de Taylor.

Si en estas circunstancias nos limitamos a los primeros términos de la expansión y suponemos además que ésta se efectúa alrededor de las proximidades de A^0 , que para nosotros representan las estimaciones iniciales de los $k_1 + k_2$ parámetros tendremos:

$$a_t = f_t(A^0:x) + \sum_{i=1}^k (A_i - A_i^0) \left(\frac{\partial f(A:x)}{\partial A_i} \right)_{A=A^0}$$

siendo $k = k_1 + k_2$.

Y si designamos por: $f(A^0:x) = a_0$

$$A_i - A_i^0 = w_i$$

$$\left(\frac{\partial f(A:x)}{\partial A_i} \right)_{A=A^0} = x_i(t)$$

la expansión de Taylor podrá expresarse como:

$$a_t \approx a_t^0 + \sum_{i=1}^k w_i^0 x_i^0(t)$$

que es una relación de tipo lineal entre los "regresores" $x_i^0(t)$ y los "coeficientes de regresión" w_i^0 , con el grado de aproximación seleccionado. De esta forma podemos estimar los k parámetros aplicando la conocida teoría de mínimos cuadrados⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾. En este caso, y supuesto que conocemos una estimación inicial de los parámetros, se utilizarán para calcular $x_i^0(t)$ y a_t^0 . A continuación y por mínimos cuadrados, se obtiene una nueva estimación de los parámetros que a su vez servirán para el cálculo de las nuevas x_i^0 y a_t^0 . Este proceso iterativo se continúa hasta haber conseguido el grado de aproximación deseado⁽¹²⁾.

Nótese que a la hora de calcular a_t^0 , nos ocurre un problema similar al procedimiento anterior, 5.1.1 en el que algunos valores a_{t-1} tenían que igualarse a cero, y que se perdían algunas observaciones al comenzar el proceso recursivo, a menos que se utilizara el procedimiento completo de la predicción hacia atrás.

Las derivadas, $x_i^0(t)$, que se requieren en el proceso de cálculo pueden obtenerse a través de dos procedimientos: numérico y analítico.

En el procedimiento numérico, método utilizado por múltiples programas de ordenador, no se emplea la expresión funcional de las derivadas, sino que éstas se calculan directamente a través de:

$$x_i^o(t) = \frac{f(A_0; A_1; A_2 \dots; A_i + h_i; A_{i+1} \dots A_{p+q}; x_t) - f(A_0; \dots A_i; A_{p+q}; x)}{h_i} \quad i=1 \dots k_1+k_2$$

siendo h_i un incremento pequeño previamente seleccionado por el usuario, o bien incorporado directamente por el programa.

El procedimiento analítico es el siguiente:

$$a_t = T^{-1}(B) F(B) x(t)$$

$$\begin{aligned} x_i^o(t) &= \left(\frac{\partial f(A; x)}{\partial A_i} \right)_{A=A^0} = \left(\frac{\partial a_t}{\partial A_i} \right)_{A=A^0} \\ &= \frac{\partial}{\partial A_i} (T^{-1}(B) F(B) x(t))_{A=A^0}. \end{aligned}$$

Al llegar a este punto se nos presentan dos casos según que A_i sea uno de los k_1 parámetros de la representación autorregresiva o bien de los k_2 correspondientes a la Media Móvil.

Para los k_1 parámetros autorregresivos:

$$x_i^o(t) = \left(\frac{\partial a_t}{\partial F_i} \right)_{A=A^0} = T^{-1}(B) B^i x(t) \Big|_{A=A^0} \quad (i=1 \dots k_1)$$

o bien,

$$x_i^o(t) = T^{-1}(B) x(t-i) \Big|_{A=A^0}$$

y recordando que $a_t = T^{-1}(B) F(B) x(t)$

$$x_i^0(t) = F^{-1}(B) a_{t-i} \Big|_{A=A^0}$$

o sea,

$$1) \quad x_i^0(t) = T_1^0 x_i^0(t-1) + T_2^0 x_i^0(t-2) + \dots + T_{k_2}^0 x_i^0(t-k_2) + a_{t-i}$$

o bien,

$$x_i^0(t) = F_1^0 x_i^0(t-1) + F_2^0 x_i^0(t-2) + \dots + F_{k_1}^0 x_i^0(t-k_1) + a_{t-i} \quad (i=1 \dots k_1)$$

Analogamente para los k_2 parámetros de la Media Móvil se tiene:

$$x_i^0(t) = \frac{\partial a_t}{\partial T_i} \Big|_{A=A^0} = T^{-2}(B) F(B) B^i x(t) \Big|_{A=A^0} \quad \begin{matrix} (i=k_1+1 \dots k_1+k_2) \\ (i=p+1 \dots k_2) \end{matrix}$$

$$o \text{ bien } x_i^0(t) = T^{-1}(B) a_{t-i} \Big|_{A=A^0}$$

$$2) \quad x_i^0(t) = T_1^0 x_i^0(t-1) + T_2^0 x_i^0(t-2) + \dots + T_{k_2}^0 x_i^0(t-k_2) + a_{t-i} \quad (i=k_1+1 \dots k_1+k_2)$$

Las expresiones 1) y 2) son las que se incorporan para el cálculo de la regresión oportuna.

Por último por lo que se refiere a zonas de confianza y varianza debe recordarse que⁽¹³⁾ con una linealización todas las fórmulas y resultados de la teoría de la regresión lineal pueden, en general, aplicarse

se y la validez de las mismas depende de lo adecuada que sea la aproximación lineal.

5.3.1) Métodos de estimación de Durbin.

Para completar, y dentro de esta primera parte del capítulo de estimación nos referiremos someramente a los trabajos de Durbin. En ellos demuestra que, asintoticamente, se pueden obtener estimaciones lo suficientemente próximas a las correspondientes de máxima verosimilitud mediante el uso de la propiedad de inversión de una Representación de Media Móvil en otra de tipo Autorregresivo de infinito número de términos, y aproximando ésta por otra de longitud finita. Para ello aplicando la propiedad de que cualquier Representación Autorregresiva de orden finito puede estimarse consistentemente por mínimos cuadrados⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾

Además Durbin⁽¹⁴⁾ sugirió una técnica de tipo iterativo de estimación para una Representación Mixta, basado en su método de estimación expuesto en el párrafo anterior. Desgraciadamente, en su trabajo, no demostró que fuera convergente ni tampoco analizó la consistencia estadística de sus estimadores.

Pasamos ahora a la estimaciónⁱ aproximada de las distintas Representaciones.

5.2) Estimación aproximada.

De acuerdo con los estudiosos de esta materia

la mayor parte de estructuras de tipo $\text{ARMA}(k_1 k_2)$ con que nos encontraremos en situaciones prácticas, limitá sus posibilidades a las siguientes: $\text{MV}(1)$, $\text{MV}(2)$; $\text{AR}(1)$, $\text{AR}(2)$; $\text{ARMA}(1,1)$.

Por otra parte lo que perseguimos en este trabajo no es el encontrar los mejores estimadores para las Representaciones seleccionadas, sino el contribuir en el análisis de la identificación de las mismas, y en la aplicación de estos métodos a nuestro contexto estadístico.

Stralkowski y colaboradores⁽¹⁶⁾ en los artículos ya citados abordan el problema de la estimación de los parámetros a través de ábacos que al efecto calculan. Este hecho es para nosotros afortunado pues permite tener estimaciones lo suficientemente buenas, dado el elevado número de datos con que trabajaremos, como para soslayar el hecho de no haber podido encontrar los programas de ordenador adecuados para efectuar la estimación directa en cada uno de los casos. Por ello pasamos a exponer estos métodos de estimación que emplearemos profusamente a lo largo de la segunda parte.

5.2.1) Estimación de Representaciones Autorregresivas.

Nos ocuparemos en primer lugar de la Representación $\text{AR}(2)$ y a continuación, como caso particular, obtendremos los resultados correspondientes para el $\text{AR}(1)$.

Si la serie objeto de nuestro estudio ha sido

identificada como AR(2), las estimaciones de los coeficientes F_1 y F_2 se relacionan con los coeficientes de autocorrelación a través de las ecuaciones de Yule-Walker, desarrolladas en 3.3.3), que para mayor comodidad reproducimos aquí:

$$R(1) = F_1 + F_2 R(1)$$

$$R(2) = F_1 R(1) + F_2$$

por tanto,

$$\begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R(1) \\ R(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R(1) \\ R(1) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix} = \frac{1}{1-R(1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -R(1) \\ -R(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \end{bmatrix}$$

por tanto,

$$F_1 = \frac{R(1) - R(1)^2}{1 - R(1)^2}$$

$$F_2 = \frac{R(2) - R(1)^2}{1 - R(1)^2}$$

y si utilizamos estimaciones de los coeficientes de autocorrelación se tendrá:

$$\hat{F}_1 = f_1 = \frac{r(1)(1-r(2))}{1-r(1)^2} \quad -1 < f_2 < 1$$

$$f_2 + f_1 \leq 1$$

$$\hat{F}_2 = f_2 = \frac{r(2) - r(1)^2}{1 - r(1)^2} \quad f_2 - f_1 \leq 1$$

Nótese que a la derecha de las estimaciones de F_1 y F_2 está la zona triangular que define los valores aceptables de los parámetros a efectos de que la

Representación Autorregresiva sea estacionaria.

Con las cinco relaciones anteriores se construye el gráfico 5-4 donde se nos relacionan los valores de los parámetros de la estructura autorregresiva y de los coeficientes de autocorrelación de primer y segundo orden.

Es conveniente recalcar que cuando el tamaño de la muestra sea razonablemente grande, como es en nuestro caso, a través del gráfico anterior se pueden obtener estimaciones finales de nuestros parámetros y que muy aproximadamente proporcionan los correspondientes de máxima verosimilitud.

De acuerdo con lo expuesto en el epígrafe 5.1), tendremos que, en el caso de Representaciones Autorregresivas estaremos frente a un problema de estimación lineal y, por ello, podremos aplicarle los resultados de la regresión mínimo cuadrática. Consiguientemente, la expresión 7) podrá escribirse como ⁽¹⁷⁾:

$$\frac{(F-f')' x' x (F-f)}{\frac{2S(f:x)}{N-2}} \sim F_{2, N-2}$$

siendo: $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} x_{-1}(1) & x_{-2}(1) \\ x_{-1}(2) & x_{-2}(2) \\ \vdots & \vdots \\ x_{-1}(N) & x_{-2}(N) \end{bmatrix}$$

y por tanto:

$$x'x = \begin{bmatrix} \sum_t x_{-1}^2(t) & \sum_t x_{-1}(t)x_{-2}(t) \\ \sum_t x_{-1}(t)x_{-2}(t) & \sum_t x_{-2}^2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r(1) \\ r(1) & 1 \end{bmatrix} = NCo$$

por otra parte un estimador insesgado de la varianza de a_t es:

$$\frac{S(f:x)}{N-2} = \sigma^2$$

y de acuerdo con 4.3) se tiene:

$$\sigma^2 = Co(1-f_1r(1)-f_2r(2)).$$

Vemos que, en este caso, la zona o región de confianza $100(1-\alpha)\%$ para F_1 y F_2 será:

$$(F-f)' \begin{bmatrix} 1 & r(1) \\ r(1) & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{N-2} h F_{2,N-2},$$

donde h es:

$$h = (1-f_1r(1)-f_2r(2)) = \frac{\sigma_a^2}{Co} = \frac{\text{suma residuos al cuadrado}}{\text{suma total de cuadrados}}$$

Además, h , representa la relación de la varianza total no "explicada" por la Representación AR(2).

La expresión anterior es una elipse, que podemos simplificar reduciendola a sus ejes:

$$\frac{u^2}{s_1^2} + \frac{v^2}{s_2^2}$$

siendo,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 - f_1 \\ F_2 - f_2 \end{bmatrix}$$

siendo la rotación de u , 45° , y la de v , 135° , y los semiejes s_1 y s_2 .

$$s_1 = \left[\frac{2 \cdot h \cdot F_{2, N-2, \alpha}}{(N-2)(1-r(1))} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$s_2 = \left[\frac{2 \cdot h \cdot F_{2, N-2, \alpha}}{(N-2)(1-r(1))} \right]^{\frac{1}{2}}$$

puede observarse además que:

$$\frac{s_{\text{mayor}}}{s_{\text{menor}}} = \left[\frac{1+|r(1)|}{1-|r(1)|} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{que es una función, exclu-}$$

sivamente del coeficiente de autocorrelación de primer orden.

En el gráfico 5-2 obtenido de las expresiones anteriores se relaciona h , con los parámetros F_1 y F_2 . Al mismo tiempo, en la parte superior del mismo gráfico, aparece la forma de la zona de confianza en función de $R(1)$.

En el gráfico 5-3 aparece la longitud del eje menor para una región de confianza del 95% en función de la relación $h/(1+|r(1)|)$ y de N .

Por consiguiente, si se desea, conocidos F_1 ; F_2 y N la región de confianza podrá obtenerse con facilidad.

Es muy útil observar que si se tiene información a priori acerca de F_1 y F_2 los gráficos pueden utilizarse para tener una idea acerca del tamaño de la muestra necesaria para proporcionar un cierto grado de precisión.

Una vez expuesta la situación para los AR(2) es fácil particularizar para AR(1). En este caso al tener sólo un parámetro, F_1 , tendremos un intervalo que estará basado en la distribución t , que es un caso particular de la distribución F anterior.

El gráfico 5-4 se construyó para la mitad de un intervalo de confianza $100(1-\alpha)\%$ dado por:

$$f_1 \pm t_{N-1, /2} \left(\frac{(1-f_1^2)}{N} \right)^{1/2}$$

5.2.1.1) Matriz de varianzas y covarianzas.

Se demuestra en Box and Jenkins⁽¹⁸⁾ que la expresión de la matriz de las varianzas y covarianzas se reduce a:

$$v(F) = \frac{(1-R'F)}{N} D^{-1}$$

siendo $v(F)$ = matriz de las varianzas y covarianzas.

$$R' = R(1) \ R(2) \ \dots \ R(k_1)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{k_1} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & R(1) & R(2) & \dots & R(k_1-1) \\ R(1) & 1 & \dots & \dots & R(k_1-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(k_1-1) & R(k_1-2) & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

N = número de observaciones.

En particular si estamos en presencia de una Representación Autorregresiva de primer orden AR(1), ello implica que $k_1=1$, en este caso:

$$R' = [R(1)] \quad F = [F_1] \quad D = 1$$

por tanto,

$$\text{var}(f_1) = \frac{(1-R(1)F_1)}{N} [1]$$

y como $F_1 = R(1)$ se tiene que $\text{var}(f_1) = \frac{(1-F_1^2)}{N}$.

Veamos ahora cual es la matriz de las varianzas para estimaciones de la Representación Autorregresiva de segundo orden AR(2).

En este segundo caso:

$$\text{var}[(f)] = \begin{bmatrix} \text{var } f_1 & \text{cov } f_1 f_2 \\ \text{cov } f_1 f_2 & \text{var } f_2 \end{bmatrix}$$

$$R' = [R(1) \ R(2)] \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & R(1) \\ R(1) & 1 \end{bmatrix}$$

por tanto,

$$D^{-1} = \frac{1}{(1-R(1))^2} \begin{bmatrix} 1 & -R(1) \\ -R(1) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{var}[F] &= \frac{1}{N} (1-R(1)R(2)) \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \frac{1}{1-R(1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -R(1) \\ -R(1) & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{N} \frac{(1-R(1)F_1-R(2)F_2)}{1-R(1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -R(1) \\ -R(1) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \text{var}[F] &= \begin{bmatrix} \text{var}(F_1) & \text{cov}(F_1, F_2) \\ \text{cov}(F_1, F_2) & \text{var}(F_2) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{(1-R(1)F_1-R(2)F_2)}{N(1-R(1)^2)} \begin{bmatrix} 1 & -R(1) \\ -R(1) & 1 \end{bmatrix} \\ \text{var}[F] &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \frac{1-R(1)F_1-R(2)F_2}{N(1-R(1)^2)} & \frac{-R(1)(1-R(1)F_1-R(2)F_2)}{1-R(1)^2} \\ \frac{-R(1)(1-R(1)F_1-R(2)F_2)}{1-R(1)^2} & \frac{1-R(1)F_1-R(2)F_2}{1-R(1)^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y como se verifica de acuerdo con 5.2.1) que:

$$\begin{aligned} R(1) &= F_1 + F_2 R(1) & R(1) &= \frac{F_1}{1-F_2} \\ R(2) &= F_1 R(1) + F_2 & R(2) &= \frac{F_1}{1-F_2} + F_2 \end{aligned}$$

tendremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1-R(1)F_1-R(2)F_2}{1-R(1)^2} &= \frac{1-\frac{F_1^2}{1-F_2}-\frac{F_1^2 F_2}{1-F_2}-F_2}{1-\frac{F_1^2}{(1-F_2)^2}} = \\
&= \frac{(1-F_2)^2-F_1^2(1-F_2)-F_1^2 F_2(1-F_2)-F_2^2(1-F_2)^2}{(1-F_2)^2-F_1^2} = \\
&= \frac{(1-F_2)^2(1-F_2^2)-F_1^2+F_1^2 F_2-F_1^2 F_2+F_1^2 F_2^2}{(1-F_2)^2-F_1^2} = \\
&= \frac{(1-F_2)^2(1-F_2^2)-F_1^2(1-F_2^2)}{(1-F_2)^2-F_1^2} = \frac{(1-F_2^2)(1-F_2)^2-F_1^2}{(1-F_2)^2-F_1^2} = (1-F_2^2)
\end{aligned}$$

y además:

$$\begin{aligned}
-R(1) \frac{(1-R(1)F_1-R(2)F_2)}{1-R(1)^2} &= -R(1)(1-F_2^2) = \frac{F_1}{1-F_2} (1-F_2^2) = \\
&= -F_1(1+F_2).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la matriz de varianzas y covarianzas sería:

$$\text{var}[F] = \begin{bmatrix} \text{var } F_1 & \text{cov } (F_1 F_2) \\ \text{cov } (F_1 F_2) & \text{var } F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} (1-F_2^2) & -F_1(1+F_2) \\ -F_1(1+F_2) & (1+F_2^2) \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida la matriz anterior podemos calcular una estimación de la misma sin mas que sustituir los valores de los parámetros F_1 y F_2 por sus estimaciones correspondientes.

Es importante destacar aquí que, a través de los cálculos anteriores, estamos en disposición de conocer el coeficiente de correlación entre las estimaciones de los dos parámetros f_1 y f_2 .

$$\text{coef. corr. } (f_1 f_2) = \frac{\text{cov}(f_1 f_2)}{(\text{var}(f_1) \text{var}(f_2))^{1/2}}$$

Nótese que si existe una correlación negativa alta entre las estimaciones puede aparecer una cierta discrepancia entre los valores de $F_1 F_2$ obtenidos a través de mínimas cuadradas y las estimaciones directas calculadas a través de las ecuaciones de Yule-Walker.

5.2.2) Estimación de la longitud (k_1) de la Representación Autorregresiva.

Uno de los problemas con que nos enfrentamos en situaciones reales consiste en decidir el orden adecuado para la Representación Autorregresiva.

De acuerdo con la teoría de los ajustes mínimo cuadráticos este problema se resuelve comenzando los ajustes por $k_1=1$, $k_1=2$, etc., hasta que no se consiga una reducción apreciable de la varianza residual.

Un test de ajuste mucho más adecuado para determinar p en las representaciones autorregresivas se debe a Quenouille⁽¹⁹⁾, aunque nosotros no haremos uso del mismo.

5.2.3) Estimación en Medias Moviles.

En el caso de que hayamos identificado como representación adecuada la correspondiente a MV(2), MV(1)⁽²⁰⁾ es un caso particular de MV(2), sabemos que se verifica de acuerdo con 3.2.5) las siguientes relaciones:

$$R(1) = \frac{T_1(1-T_2)}{1+T_1^2+T_2^2} \quad R(2) = -\frac{T_2}{1+T_1^2+T_2^2}$$

analogamente para MV(1),

$$R(1) = -\frac{T_1}{1+T_1^2}$$

Expresiones en las que claramente aparece el carácter no lineal de las mismas.

Utilizando las relaciones anteriores se construye, en forma análoga al caso de las Representaciones Autorregresivas, el gráfico 5-5 en el que se relacionan los dos coeficientes de autocorrelación con los parámetros T_1 y T_2 , y sirve en consecuencia para determinar t_1 y t_2 (estimaciones de T_1 y T_2) a partir de las estimaciones de los dos primeros coeficientes de autocorrelación.

En este punto⁽²¹⁾ es conveniente recordar que en valor absoluto los coeficientes de autocorrelación en las Representaciones en Media Móvil deben ajustarse a las limitaciones expuestas en el cuadro 5-4. Una vez que tenemos estimaciones de los parámetros se puede explicitar las regiones o zonas de confianza para las mismas.

Dado que nos enfrentamos con un problema de estimación no lineal, se pueden calcular las zonas de confianza, $100(1-\alpha)\%$, mediante la aproximación lineal que deriva de expandir en serie de Taylor la suma de cuadrados, $S(T_1, T_2)$, y limitar la serie a los términos lineales. A través de este procedimiento se podrán utilizar los gráficos obtenidos al referirnos a las Representaciones Autorregresivas para AR(2).

5.2.3.1) Matriz de varianzas y covarianzas.

Se demuestra⁽²²⁾ que para muestras de tamaño relativamente grandes la matriz de varianzas y covarianzas para una $MV(k_2)$ tiene la misma forma que la correspondiente matriz de varianzas y covarianzas de una Representación Autorregresiva del mismo orden $AR(k_2)$ por consiguiente tendremos:

$MV(T_1)$

$$\text{var}(T_1) = \frac{1}{N} (1 - T^2)$$

$MV(2)$

$$\text{var}(T) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 - T_2^2 & -T_1(1 + T_2) \\ -T_1(1 + T_2) & 1 - T_2^2 \end{bmatrix}$$

Una vez más sustituyendo los valores de los parámetros (T_1, T_2) por sus estimaciones (t_1, t_2) nos proporcionaran los de sus varianzas y covarianzas.

5.2.4) Representación Mixta ARMA (1,1)

El último modelo del que nos interesa explicitar

el procedimiento de estimación y cálculo de la región de confianza y matriz de varianzas y covarianzas es el correspondiente a la Representación Mixta ARMA (1,1).

En ésta se verifica ⁽¹¹¹¹⁾ (vease 3.4.5)

$$R(1) = \frac{(1-T_1 F_1)(F_1 - T_1)}{1 + T_1^2 - 2F_1 T_1} ; \quad R(k) = F_1 R(k-1) \quad K \geq 2$$

A partir de esta relación se construye el gráfico 5-6 gracias al cual, una vez conocidas las estimaciones de $R(1)$ y $R(2)$ se obtienen las correspondientes a T_1 y F_1 .

Las regiones o zonas de confianza para F_1 y T_1 son de la forma:

$$\frac{(F_1 - f_1)^2}{(1 - F_1^2)} - \frac{2(F_1 - f_1)(T_1 - t_1)}{(1 - F_1 T_1)} + \frac{(T_1 - t_1)^2}{(1 - T_1^2)} = \frac{\chi_{2,\alpha}^2}{N}$$

que es la ecuación de una elipse. Reducida ésta a sus ejes será:

$$\frac{u^2}{s_1^2} + \frac{v^2}{s_2^2} = 1$$

siendo los semiejes:

$$s_1^2 = \frac{1}{a} \frac{\chi_{2,\alpha}^2}{N} ; \quad s_2^2 = \frac{1}{b} \frac{\chi_{2,\alpha}^2}{N}$$

$$a = \frac{\cos^2 \alpha}{(1 - F_1^2)} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{(1 - F_1 T_1)} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{(1 - T_1^2)}$$

$$b = \frac{\sin^2 \alpha}{(1-F_1^2)} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{(1-F_1 T_1)} + \frac{\cos^2 \alpha}{(1-T_1^2)}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{(1-T_1^2)^{-1} - (1-F_1^2)^{-1}}{2(1-F_1 T_1)^{-1}}$$

A través del conjunto anterior de ecuaciones, Stralkowski procedió a calcular el cuadro 5-2 y el gráfico 5-7.

La tabla anterior de los valores de c_1 y c_2 que a su vez sirven para obtener s_1 y s_2 , a través de:

$$c_1^2 = n s_1^2 \quad c_2^2 = n s_2^2$$

Un problema que aquí surge, es el de si las anteriores regiones de confianza son adecuadas puesto que se simplifica el problema inicial en base a una aproximación lineal.

En los problemas con que nos enfrentaremos y dado que el tamaño de la muestra es suficientemente grande no existiran grandes problemas, sin embargo para muestras de tamaño más reducido, éstos pueden presentarse. Para más detalles vease el artículo original de Stralkowski⁽²²⁾.

5.2.4.1) Matriz de varianzas y covarianzas en el ARMA (1,1).

Para muestras de tamaño adecuado se demuestra⁽²²⁾ que la matriz de las varianzas y covarianzas en un proceso ARMA(1,1) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \text{var}(F_1 T_1) &= \begin{bmatrix} \text{var}(F_1) & \text{cov}(F_1 T_1) \\ \text{cov}(F_1 T_1) & \text{var}(T_1) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1-FT}{N(F-T)^2} \begin{bmatrix} (1-F^2)(1-FT) & (1-F^2)(1-T^2) \\ (1-F^2)(1-T^2) & (1-T^2)(1-FT) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nótese que en el caso de que $F=T$ las varianzas tienden a infinito, pero en este caso no existe ningún problema ya que el modelo ARMA(1,1) se transforma en:

$$(1-FB) x(t) = (1-TB) a_t$$

y si $F=T$, tendremos:

$$(1-FB) x(t) = (1-FB) a_t$$

y por tanto $x(t) = a_t$, es decir, nuestra variable se reduce a una serie puramente aleatoria.

Una vez finalizados estos capítulos damos por concluida la primera parte de nuestra exposición en la que hemos abordado los aspectos teóricos de la modelización de series temporales a través de las Representaciones Mixtas ARMA (k_1, k_2) . Pasamos a continuación, a la segunda en la que aplicaremos lo desarrollado hasta aquí, a diversos indicadores de coyuntura relativos a nuestra Economía.

C A P Í T U L O V I

I n t r o d u c c i ó n

La segunda parte de nuestro trabajo está dedicada a la aplicación de la metodología desarrollada en los capítulos anteriores y en especial a verificar la operatividad del procedimiento de identificación propuesto en el capítulo IV.

Empezaremos la exposición del capítulo aludiendo a los estudios relacionados que se han llevado a cabo en nuestro país para pasar, a continuación, a analizar la fuente y ámbito temporal de los datos utilizados, así como también los aspectos relacionados con la estacionariedad de los mismos.

Por último, estudiamos cada uno de los once indicadores de coyuntura seleccionados y llevamos a cabo la identificación de las Representaciones que los explican.

6-1) Estudios previos relacionados con el tema.

Los únicos trabajos que se han efectuado en España en los que se intentan ajustar Modelos Autorregresivos y de Medias Móviles, por lo que conozco, han sido llevados a cabo por M. Rodríguez y Rodríguez Zúñiga en dos artículos aparecidos recientemente^{(1),(2)}.

En el primero de ellos, "Análisis de una serie histórica: determinación de componentes y formulación de modelos interpretativos", publicado en Cuadernos de Economía vol. 3, nº 6, Enero-Abril 1.975, introduce la metodología a seguir y a continuación, la aplica a un ejemplo concreto⁽³⁾. En el segundo de los artículos, "Incidencia sectorial en la estructura de los precios al por mayor: un estudio comparativo de los sectores agrícola e industrial" aplica la metodología desarrollada en su trabajo anterior para⁽⁴⁾:

- 1.- "Poner de relieve ciertos aspectos presentes en la evolución de los precios agrícolas e industriales y, en lo posible, hacer una evaluación comparativa de ellos.
- 2.- Intentar hacer algunas reflexiones sobre la importancia relativa que cada uno de los sectores en estudio ha tenido sobre la estructura general de los precios durante los años estudiados".

En este trabajo, no vamos a realizar un análisis crítico general, de las contribuciones anteriores puesto que nos limitaremos a constatar que la sistemática aquí seguida difiere de la suya para la identificación de los "modelos interpretativos".

En realidad, Rodríguez Zúñiga, no se refiere directamente al problema de la identificación aunque intenta llevarla a cabo en las pags. 103-113 del primero de sus artículos, y concretamente entre el final de la pag. 108 y la mitad de la 109, que para mayor fidelidad y comodidad reproducimos aquí:

"Se ha visto que los parámetros a estimar en estos modelos son μ , σ_a^2 , ρ_i , ρ_j . La media a través de los teoremas ergódicos puede ser calculada directamente. Las ya definidas ecuaciones de Yule-Walker permiten un método para el cálculo de los coeficientes correspondientes a la parte Autorregresiva, partiendo de los valores estimados para la función de autocorrelación, según el método y criterios ya descritos más arriba. La determinación del grado autorregresivo - valor de p- se hace a través de una valoración relativa de la varianza residual, es decir, aquel que disminuya de una forma más sustancial la varianza del proceso.

Una vez calculada la componente autorregresiva de la serie, se elimina ésta y la serie resultante contendrá únicamente la parte que corresponde a la Media Móvil, cuyos parámetros pueden ser determinados a través de las ecuaciones de autocovarianzas en un proceso MA, una vez que dichos valores han sido estimados por el método general ya visto.

La determinación de la estructura del modelo definitivo se basa, al igual que en el análisis de la componente autorregresiva, en una valoración comparada de la varianza residual del sistema.

El valor que toma la varianza residual, nos dará una idea de hasta que punto el modelo autorregresivo -integrado- a Media Móvil elegido sirve para "explicar dicha serie".

Esta idea se complementa con la determinación de unos índices que permitan valorar la capacidad interpretativa del modelo determinado⁽⁵⁾.

Es decir, basa su identificación, en el análisis de la varianza residual.

Por lo que respecta al espectro de la variable a estudiar, unicamente lo utiliza para examinar la presencia de tendencias, ciclos y estacionalidad sin ligarlo al análisis de la Identificación.

6.2) Los datos utilizados: fuente y ámbito temporal

Los datos estadísticos utilizados en nuestro trabajo se refieren a las siguientes variables:

- precios al por mayor
 - índice general (IPM)
 - índice grupo general de Alimentos, Bebidas y Tabacos (IPAT).
 - índice grupo especial de productos agrícolas (IPPA).
 - índice grupo especial de productos agrícolas industrializados (IPAI).
- coste de la vida
 - índice general (ICV)
 - índice grupo general. Alimentación (ICVA).
- oferta monetaria (M)
- índice general de producción industrial (IPI).

- Acero (producción) (A)
- Energía Eléctrica (Demanda) (EE)
- Cemento artificial (ventas) (CA)

La fuente de los datos estadísticos manejados, originaria en unos casos y derivada en otros, ha sido el Suplemento del Boletín Mensual de Estadística (avance de las series desestacionalizadas) publicado por el Instituto Nacional de Estadística. De esta manera hemos podido disponer de datos homogéneos en cuanto a su sistema de desestacionalización, y con un origen de tiempo común fechado en Enero de 1.964, fecha más remota para la que hemos tenido acceso a esta información estadística desestacionalizada, pues si bien hubieramos podido disponer, con relativa facilidad de datos anteriores, éstos no estarían desestacionalizados ya que el sistema utilizado para la corrección de la estacionalidad es el O.S.C.E., de la oficina de Estadística de las Comunidades Europeas,⁽⁶⁾ no disponible al usuario individual. Para nosotros el poder trabajar con series desestacionalizadas es muy importante puesto que de esta manera conseguimos espectros de evolución suave, que facilitan su interpretación, al no producirse "Leakage" desde los picos estacionales con lo que se desvirtua el verdadero espectro.

Además debe tenerse en cuenta que hacer previsiones sobre la serie desestacionalizada no supone gran limitación, puesto que las decisiones de Política Económica se toman sobre la base del análisis de datos desestacionalizados.

Por otra parte el tomar en consideración el fenómeno estacional no supone gran dificultad ya que se resuelve sin más que aplicarle el operador $(1-dB^n)$ a la variable estacionaria, siendo n el número de observaciones que contiene un año y d un coeficiente a especificar que suele normalmente hacerse igual a la unidad⁽⁷⁾.

Otro aspecto que nos ha limitado la utilización de otras variables ha sido la falta de homogeneidad en cuanto a la presentación de los datos publicados puesto que, por ejemplo, en las separatas más recientes y en relación al índice del coste de la vida aparecen las siguientes variables:

- Coste de la vida: - Índice general
- Grupo general. Alimentación.
 - Grupo general. Vestido y calzado.
 - Grupo general. Vivienda.
 - Grupo general. Gastos de casa.
 - Grupo general. Gastos diversos

que cubre un ámbito mayor que el utilizado por nosotros pero, desgraciadamente, no nos ha sido posible localizar datos de estas nuevas variables desde el origen de tiempo común por nosotros utilizado. Este hecho no se limita sólo al índice del coste de la vida sino también a otras variables.

Conviene señalar que si bien la base del índice del coste de la vida va referida al año 1.968, el resto de las variables-índice consideradas tienen una base anterior al orgien de tiempo elegido por nosotros (precios al por mayor, base 1.955=100 y producción industrial, base 1.962=100) por lo que los

datos previos a Enero de 1.969 referidos al coste de la vida han sido calculados en base al sistema anteriormente en vigor (1.958=100) y posteriormente pasados a base 1.968 a través de los correspondientes coeficientes de enlace entre uno y otro sistema.

La metodología, fuentes de información y la descripción detallada de los tres sistemas, índices vigentes en la actualidad están recogidos en las tres monografías siguientes, publicadas por el Instituto Nacional de Estadística:

- "Coste de la Vida. Sistema de números índices" (Base 1.968=100).
- "Precios al por Mayor. Nuevo Sistema de números índices" (Base 1.955=100).
- "Sistema de números índices de Producción Industrial" (Base 1.962=100).

Haciendo una breve síntesis de tres monografías, diremos que la fórmula empleada para el cálculo de los índices es, en todas ellas, del tipo Laspeyres.

Reflejamos, a continuación, en los cuadros A, B y C la estructura de las ponderaciones a nivel de grandes agrupaciones por ser uno de los aspectos determinantes de la elección de las variables manejadas en nuestro trabajo.

Cuadro A. Coste de la Vida. (Base 1.968=100)

<u>Grupos</u>	<u>Ponderaciones(%)</u>
Alimentación	49.4
Vestido y Calzado	13.9
Vivienda	8.0
Gastos de Casa	9.9
Gastos diversos	18.8
Total	100.0

Cuadro B. Precios al por Mayor. (Base 1.955=100)

<u>Grupos</u>	<u>Ponderaciones(%)</u>
Alimentos, Bebidas y Tabacos	52.3
Textiles	13.4
Cueros, Pielés y Derivados.	2.6
Materiales de construcción.	3.7
Minerales Metálicos	1.1
Metales, Productos Metálicos y Maquinaria	9.4
Combustibles, Lubricantes y Energía Eléctrica	9.1
Productos Químicos	6.0
Varios	2.4
Total	100.0

Además de los nueve grupos generales considerados, que son mutuamente excluyentes y exhaustivos en el sentido de cubrir los 296 artículos seleccionados, se contemplan otros nueve especiales caracterizados por tener elementos comunes. En nuestro análisis hemos considerado el grupo especial de productos agrícolas industrializados representativo de lo que podemos calificar un "gran" grupo especial, y también

el de productos agrícolas representativo de un grupo especial de "tipo medio".

Grupo C. Producción Industrial. (Base 1962=100)

<u>Sector Industrial</u>	<u>Ponderaciones(%)</u>
Industrias extractivas	5.2
Industrias Manufactureras	75.8
Industrias de Electricidad y Gas..	5.2
Industrias de la Construcción	14.0
Total ...	100.0

6.3) Estacionariedad.

Es bien sabido que la mayoría de las series económicas relativas a producción y precios tienen una tendencia creciente en sus momentos de primer y segundo orden.

Los datos que utilizaremos en este trabajo también presentan esta característica y para evidenciarlo hemos calculado los estadísticos elementales de las variables y sus diferencias, estando éstas representadas por el símbolo Δ , para tres secciones diferentes:

- a) datos del 3 al 129 ambos inclusive
- b) datos del 3 al 100 ambos inclusive
- c) datos del 100 al 129 ambos inclusive

a) Datos del 3 al 129

<u>variable</u>	<u>media</u>	<u>d.t.</u>	<u>e.t.</u>	<u>máximo</u>	<u>mínimo</u>	<u>recorrido</u>
IPM	214.6	35.4	3.1	324.0	163.2	160.8
IPAT	242.3	39.7	3.5	362.6	171.6	191.0
IPPA	234.1	33.7	2.9	332.2	168.7	163.5
IPAI	219.2	37.5	3.3	343.5	166.7	176.8
M	722.3	337.0	29.9	1536.2	321.7	1214.5
A	558.9	234.9	20.8	1071.9	245.1	826.8
EE	4043.8	1313.7	116.5	6671.6	2093.3	4578.3
CA	1337.3	379.3	33.6	2153.4	687.3	1466.2
ICV	110.7	24.6	2.1	177.3	72.8	104.5
ICVA	110.3	22.9	2.0	174.4	73.4	101.0
IPI	228.3	72.8	6.4	416.9	121.4	295.5
ΔIPM	1.2	2.0	0.1	8.4	-3.3	11.7
ΔIPAT	1.5	3.1	0.2	13.8	-6.8	20.6
ΔIPPA	1.3	4.4	0.3	14.7	-10.3	25.0
ΔIPAI	1.4	4.4	0.3	36.5	-13.3	49.8
ΔM	9.5	9.4	0.8	48.7	-7.6	56.3
ΔA	5.6	29.9	2.6	96.9	-127.3	224.2
ΔEE	32.6	111.6	9.9	362.0	-496.7	858.8
ΔCA	10.4	88.1	7.8	363.4	-336.3	699.7
ΔICV	0.8	0.8	0.1	5.3	-1.2	6.5
ΔICVA	0.8	1.3	0.1	7.1	-2.4	9.5
ΔIPI	1.8	13.2	1.1	93.1	-80.6	173.7

donde las abreviaturas d.t. y e.t. significan desviación típica y error típico respectivamente, definida la última como:

$$e.t. = \frac{d.t.}{\sqrt{N}}$$

b) Datos del 3 al 100 ambos inclusive.

<u>variable</u>	<u>media</u>	<u>d.t.</u>	<u>e.t.</u>	<u>máximo</u>	<u>mínimo</u>	<u>recorrido</u>
IPM	198.2	13.9	1.4	230.8	163.2	67.6
IPAT	223.9	18.0	1.8	268.4	171.6	96.8
IPPA	218.9	15.9	1.6	254.2	168.7	85.5
IPAI	201.2	15.1	1.5	246.3	166.7	79.6
M	562.8	163.4	16.5	957.0	321.7	635.3
A	457.1	157.2	15.8	798.8	245.1	553.7
EE	3494.1	928.0	93.7	5240.7	2093.3	3147.4
CA	1178.5	267.7	27.0	1637.2	687.2	950.0
ICV	99.6	13.2	1.3	126.5	72.8	53.7
ICVA	99.7	11.2	1.1	124.1	73.4	50.7
IPI	195.9	44.3	4.4	284.0	121.4	162.6
Δ IPM	0.7	1.6	0.1	6.2	-3.3	9.5
Δ IPAT	1.0	2.8	0.2	10.0	-6.8	16.8
Δ IPPA	0.8	4.4	0.4	14.7	-10.3	25.0
Δ IPAI	0.8	2.5	0.2	11.2	-13.3	24.5
Δ M	6.5	6.6	0.6	48.7	-7.6	56.3
Δ A	5.2	25.3	2.5	96.9	-77.4	174.3
Δ EE	31.9	93.9	9.4	362.0	-183.3	545.4
Δ CA	9.1	81.4	8.2	363.4	-336.3	699.7
Δ ICI	0.5	0.5	0.1	1.7	-1.2	2.9
Δ ICIA	0.5	1.0	0.1	3.0	-2.4	5.4
Δ IPI	1.6	5.8	0.5	20.0	-14.7	34.7

c) Datos del 100 al 129 ambos inclusive

<u>variable</u>	<u>media</u>	<u>d.t.</u>	<u>e.t.</u>	<u>máximo</u>	<u>mínimo</u>	<u>recorrido</u>
IPM	268.7	29.7	5.4	324.0	230.0	94.0
IPAT	303.4	27.8	5.0	362.6	265.2	97.4
IPPA	284.0	27.4	5.0	332.2	246.5	85.7
IPAI	279.1	24.2	4.4	343.5	243.3	100.2
M	1251.1	175.3	32.0	1536.2	957.0	579.2
A	898.0	67.0	12.2	1071.9	758.5	313.4
EE	5876.0	407.9	74.4	6671.6	5140.0	1531.6
CA	1863.3	125.2	22.8	2153.4	1556.7	596.7
ICV	147.5	15.1	2.7	177.3	126.5	50.8
ICVA	145.5	14.7	2.6	174.1	124.1	150.3
IPI	336.3	30.6	5.5	416.9	280.6	136.3
Δ IPM	3.1	2.1	0.3	8.4	-0.8	9.2
Δ IPAT	3.1	3.5	0.6	13.8	-3.2	17.0
Δ IPPA	2.6	4.3	0.8	10.9	-8.1	19.0
Δ IPAI	3.3	7.6	1.3	36.5	-6.5	43.0
Δ M	19.8	9.9	1.8	41.8	-3.8	45.6
Δ A	5.3	42.4	7.7	49.5	-127.3	176.8
Δ EE	31.2	158.2	28.8	305.9	-496.7	802.6
Δ CA	11.4	108.9	19.8	289.9	-261.0	550.9
Δ ICV	1.7	1.0	0.1	5.3	0.3	5.0
Δ ICVA	1.7	1.7	0.3	7.1	-1.9	9.0
Δ IPI	2.2	25.5	4.6	93.1	-80.6	173.7

Como ya hemos dicho en la parte I, la teoría del análisis espectral ha sido desarrollada para series estacionarias, pero la presencia de tendencia en Media y Varianza, así como también los cambios de estructura motivados por el continuo

juego de los factores económicos producen situaciones de no estacionariedad.

Por consiguiente, parecería que no son de aplicación los métodos descritos, en la primera parte, a las series económicas. Afortunadamente, sin embargo, se demuestra que una vez eliminada la tendencia mediante los procedimientos habituales, si la serie tiene una varianza que presenta una pauta de variación no muy acusada, el efecto sobre el espectro estimado consiste, simplemente, en la aparición de una constante de escala. Esta es la razón por la que el análisis espectral puede usarse, directamente, sobre las series económicas de producción y precios sin necesidad de utilizar transformaciones de tipo logarítmico⁽⁸⁾ además, si la estructura que genera los datos no varía bruscamente, lo cual no sucede en Economía salvo en circunstancias excepcionales, Gran -- ger⁽⁹⁾ demuestra que el espectro estimado no se aparta sensiblemente del teórico.

Pasamos, a continuación, a analizar cada una de las variables, indicadoras de coyuntura, seleccionadas de acuerdo con el método de identificación que aquí proponemos.

En primer lugar estudiaremos los índices relativos a precios al por mayor y los del coste de la vida y a continuación nos referiremos a la oferta monetaria.

Por último abordaremos las relacionadas con el sector productivo a través del índice de producción

industrial, producción de acero, demanda de energía eléctrica y ventas de cemento artificial.

6.4) Indice de precios al por mayor.

Para este grupo se han tomado todas las variables de que disponíamos puesto que trabajaremos con:

- Índice general de precios al por mayor (IPM)
- Índice de alimentos, bebidas y tabacos (IPAT)
- Índice de productos agrícolas (IPPA)
- Índice de productos agrícolas industrializados (IPAI)

6.4.1) Indice general de precios al por mayor (IPM)

Para ésta y cada una de las variables se han calculado una serie de estadísticos elementales que consisten en: media, desviación típica, error típico, máximo, mínimo y recorrido. A través del valor que tomen los estadísticos elementales podremos hacernos una idea de las características básicas de la serie.

A partir de los datos recogidos en el cuadro 6-1 se han calculado los estadísticos elementales para el índice general de precios al por mayor que nos han dado los siguientes valores:

I.P.M.-

Media	214.61
d.t.	35.47
e.t.	3.14
máximo	324.0
mínimo	163.2
recorrido	160.8

por tanto la variable IPM no puede ser considerada como estacionaria. Esta primera conclusión se refuerza si observamos que la variable presenta una fuerte tendencia creciente, y que además el correlograma decae linealmente y con suavidad (véase el cuadro 6-23).

Del breve análisis anterior vemos que habrá que recurrir a tomar diferencias de la serie original para intentar reducirla a otra que sea estacionaria.

Si tomamos, pues, la primera diferencia de la serie IPM, obtendremos la variable Δ IPM cuyos estadísticos elementales toman los siguientes valores:

Δ I.P.M.-

Media	1.286
d.t.	2.05
e.t.	0.13
Máximo	8.40
Mínimo	3.30
Recorrido	11.70

A partir de estos estadísticos y del análisis de los datos, recogidos en el cuadro 6-2, observamos que en principio puede esta serie ser tomada como razonablemente estacionaria.

Por consiguiente, intentaremos identificar la Representación más idónea para la variable Δ IPM. La identificación se llevará a cabo, en primer lugar, a través del procedimiento propuesto por Box y Jenkins y en segundo lugar, por el desarrollado en este trabajo⁽¹⁰⁾.

Identificación:

Como ya hemos dicho anteriormente, el método de Box y Jenkins reside en el análisis de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial⁽¹⁴⁾.

Los valores correspondientes a las citadas funciones están detallados en los cuadros 6-24 y 6-25, de los que, para mayor comodidad, recogemos los valores de los seis primeros coeficientes.

<u>I.P.M.-</u>	<u>retardo</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
	1	0.241	0.241
	2	0.210	0.161
	3	0.405	0.353
	4	0.359	0.244
	5	0.318	0.191
	6	0.398	0.238

las varianzas correspondientes vienen dadas por:

$$\text{var } r(k) \approx \frac{1}{N} = \frac{1}{126} \approx 0.008$$

$$\text{var } f_{kk} \approx \frac{1}{N} = \frac{1}{126} \approx 0.008$$

y por tanto sus desviaciones típicas:

$$\text{d.t.}(r(k)) \approx 0.089$$

$$\text{d.t.}(f_{kk}) \approx 0.089$$

lo cual nos indica que, en principio, los distintos coeficientes estimados son significativamente diferentes de cero.

Por consiguiente la identificación que nos proporciona Box y Jenkins es la de una Representación Mixta aunque el orden de los operadores autorregresivos y de media móvil sería superior a la unidad, lo cual parecería indicar que la Representación idónea para este indicador de coyuntura no coincide con las propuestas. Veamos ahora que sucede si analizamos las características del espectro⁽¹²⁾ de la citada variable. El espectro estimado está representado en el gráfico 6-4, y en él observamos que presenta una concentración sustancial de la varianza en la banda de frecuencias comprendida entre $f=0$ y $f=0.063$, siendo el resto del mismo prácticamente plano.

El recorrido está comprendido entre 0.5 y 7.5, por tanto la relación resultará:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}} \approx \frac{7.5}{0.5} \approx 15$$

Directamente se ve que, aunque una Representación AR(1) tiene una forma parecida, para el valor resultante del parámetro, $w \approx 0.241$, el espectro tiene una caída muy suave.

Análogas consideraciones se obtienen respecto a una MV(1) dado que las formas espectrales que produce son de evolución suave.

Veamos las de segundo orden: Por idénticas consideraciones de evolución suave del espectro de las MV(2), éstas quedan descartadas.

Las únicas Representaciones candidatos son las

AR(2) y ARMA(1,1), debido a que la forma del espectro estimado se aproxima a la teórica de una AR(2) con parámetros $f_1 \approx 0,4$ y $f_2 \approx 0,8$.

Supongamos, provisionalmente, que se trata de una AR(2) y normalicemos el espectro estimado para decidir si las características cuantitativas de los espectros son similares.

La estimación de la varianza residual la conocemos a través de la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = c_0(1-f_1 r(1)-f_2 r(2))$$

c_0 la obtenemos a partir de los estadísticos elementales anteriormente citados:

$$c_0 = d.t.^2 = 2.05^2 \approx 4.20$$

Los valores de los parámetros f_1 y f_2 los calculamos mediante el gráfico 5-4 conociendo, previamente, que $r(1) = 0.241$ y $r(2) = 0.210$, resultando:

$$f_1 \approx 0.22 \quad f_2 \approx 0.16$$

por tanto:

$$\sigma^2 = 4,2(1-0,22 \cdot 0,241-0,16 \cdot 0,21) \approx 3,836$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 1,22$$

$$g(w) \text{ nor max } \approx \frac{7,4}{1,22} \approx 6,06$$

$$g(w) \text{ nor min} \simeq \frac{0,5}{1,22} \simeq 0,41$$

Veamos, a continuación, cuales son los valores correspondientes al espectro teórico:

$$g(w) \text{ nor} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1) \cos w-2f_2 \cos 2w}$$

Como en este caso el máximo se alcanza en $w=0$ y el mínimo en $w=\pi$ tendremos:

$$g(w) \text{ nor max} \simeq \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)-2f_2}$$

$$\simeq \frac{1}{1+0,22^2+0,16^2+2 \cdot 0,22(0,16-1)-2 \cdot 0,16}$$

$$g(w) \text{ nor min} \simeq \frac{1}{1+0,22^2+0,16^2-2 \cdot 0,22(0,16-1)-2 \cdot 0,16}$$

$$\simeq 0,89$$

y su relación:

$$\frac{g(w) \text{ nor max}}{g(w) \text{ nor min}} \simeq \frac{2,6}{0,89} \simeq 2,91$$

Por consiguiente, vemos que no existe coincidencia entre los valores estimados y los teóricos, una vez llevada a cabo la normalización. Por tanto tenemos que rechazar la Representación AR(2).

Una vez visto que ésta no es adecuada nos queda por estudiar la mixta ARMA(1,1).

Con las estimaciones de los coeficientes $r(1)$ y $r(2)$ y mediante el gráfico 5-6 obtenemos los parámetros Autorregresivo y la Media Móvil, que resulta ser:

$$f_1 \approx 0,88 \quad t_1 \approx 0,70$$

Para este tipo de Representaciones la varianza residual, recordemos viene dada por:

$$\sigma^2 = c_0 \frac{1-f_1^2}{1+t_1^2-2f_1t_1}$$

por tanto:

$$\sigma^2 = 4,2 \frac{1-0,88^2}{1+0,70^2-2 \cdot 0,88 \cdot 0,70} \approx 3,673$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx \frac{3,673}{n} \approx 1,169$$

con lo cual:

$$g(w) \text{ nor max} \approx \frac{7,4}{1,169} \approx 6,33$$

$$g(w) \text{ nor min} \approx \frac{0,5}{1,169} \approx 0,428$$

Los valores teóricos vienen dados por:

$$g(w) \text{ nor} = \frac{1-2t_1 \cos w + t_1^2}{1-2f_1 \cos w + f_1^2}$$

y por tanto muy aproximadamente:

$$g(w) \text{ nor max} \simeq \frac{1-2t_1+t_1^2}{1-2f_1+f_1^2} \simeq \frac{1-2 \cdot 0,70+0,70^2}{1-2 \cdot 0,88+0,88^2} \simeq 6,25$$

$$g(w) \text{ nor min} \simeq \frac{1+t_1^2}{1+f_1^2} \simeq \frac{1+0,7^2}{1+0,88^2} \simeq 0,84$$

y la relación entre los valores máximo y mínimo será:

$$\frac{g(w) \text{ nor max}}{g(w) \text{ nor min}} = \frac{6,25}{0,84} \simeq 7,44$$

En este caso, vemos que la ordenada máxima coincide sensiblemente, pero no así la mínima que aparece el doble de la que resulta en el espectro estimado.

No obstante estos resultados parecen adecuados si tenemos en cuenta que la estimación de f_1 y t_1 no es muy correcta debido a la zona límite donde están situadas y habría, por tanto, que proceder a una estimación más adecuada de los citados coeficientes.

Si admitimos como correcta la Representación Mixta, ARMA(1,1), podemos calcular las desviaciones típicas asociadas a sus parámetros.

Según 5.2.4.1):

$$\text{var}[f_1 t_1] = \begin{bmatrix} \text{var}(f_1) & \text{cov}(f_1 t_1) \\ \text{cov}(f_1 t_1) & \text{var}(t_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1-f_1 t_1}{N(f+t)^2} \begin{bmatrix} (1-f_1^2)(1-f_1 t_1) & (1-f_1^2)(1-t_1^2) \\ (1-f_1^2)(1-t_1^2) & (1-t_1^2)(1-f_1 t_1) \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$\text{var}[f_1 t_1] \approx \frac{1-0,88 \cdot 0,7}{126(0,88-0,7)^2} \begin{bmatrix} (1-0,88^2)(1-0,88 \cdot 0,7) & (1-0,88^2)(1-0,7^2) \\ (1-0,88^2)(1-0,7^2) & (1-0,7^2)(1-0,88 \cdot 0,7) \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\begin{aligned} \text{var}(f_1 t_1) &\approx 0,008 & \text{var}(t_1) &\approx 0,018 \\ \text{d.t.}(f_1) &\approx 0,09 & \text{d.t.}(t_1) &\approx 0,13 \end{aligned}$$

con lo cual la primera diferencia del índice general de precios al por mayor sigue una Representación Mixta de parámetros:

$$f_1 \begin{cases} 0,88 \\ (0,09) \end{cases} \quad t_1 \begin{cases} 0,7 \\ (0,13) \end{cases}$$

donde el valor numérico entre paréntesis indica la estimación de la desviación típica correspondiente.

Otro aspecto a resolver, es decidir si tenemos que tomar en consideración una tendencia determinista en nuestra Representación.

De acuerdo con 4.5) tenemos:

$$e.t. = \frac{c_0}{n} \left(1 + \frac{2r(1)}{r(1)r(2)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4,2}{126} \left(1 + \frac{2 \cdot 0,241}{0,241 - 0,21}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,74$$

que si lo comparamos con el valor medio de nuestra variable, ΔIPM , de valor numérico igual a 1,28 nos sugiere la conveniencia de rechazar la incorporación de una tendencia determinista en nuestra Representación.

$$\text{Por tanto: } (1-0,88 B) \Delta IPM_t = (1-0,7 B) a_t \\ (0,09) \quad (0,13)$$

Una vez finalizado el proceso de identificación nos parece oportuno insistir algo más en él porque hemos "casi" identificado dos Representaciones para la misma variable lo cual, a nuestro modo de ver, nos lleva a intentar aclarar el porqué son observacionalmente similares.

Para estudiar la relación entre las dos utilizaremos la propiedad de inversión desde la ARMA(1,1) a la AR(2), e intentaremos identificar los coeficientes individualmente considerados.

La Representación ARMA(1,1), viene dada por:

$(1-0,88B) x(t) = (1-0,7B)a_t$, siendo $x(t) = \Delta IPM$, e invirtiendo:

$$(1-0,88B)(1-0,7B)^{-1} x(t) = a_t$$

$$(1-0,88B)(1+0,7B+0,7^2B^2+0,7^3B^3+\dots)x(t)=a_t$$

$$1-(0,88-0,7)B-(0,88-0,7)0,7B^2-(0,88-0,7)0,7^2B^2+\dots \\ \dots) x(t) = a_t$$

o sea:

$$(1-0,18B-0,13B^2-0,09B^3-0,06B^4-0,04B^5\ldots) x(t)=a_t$$

y si eliminamos los términos de menor peso tendremos⁽¹³⁾:

$$(1-0,18B-0,13B^2) x(t) \approx a_t$$

es decir, la Representación ARMA(1,1), de parámetros $f_1 \approx 0,88$ y $t_1 \approx 0,7$, es parecida a la Representación Autorregresiva de segundo orden de parámetros $f_1=0,18$ y $f_2=0,13$, valores que se aproximan a los calculados por nosotros anteriormente, lo cual explica su apariencia semejante.

En este ejemplo hemos visto la posibilidad que tienen los Modelos Mixtos, de representar Autorregresivos y de Medias Móviles de orden elevado, con lo cual conseguimos una gran reducción en el número de parámetros a estimar.

Si haciendo abstracción de los resultados anteriores supieramos que la serie queda igualmente bien representada por los dos modelos, nos podríamos preguntar como seleccionar el mejor de los dos, si ello es posible.

Una posibilidad consistiría en utilizar el criterio de minimizar la varianza de la diferencia entre el valor real de ΔIPM y el obtenido a través de la Representación.

Otro criterio puede basarse en la selección de la que mejor indique los puntos de cambio, etc.

Una vez llevada a cabo nuestra identificación es conveniente compararla con la realizada por R. Rodríguez Zúñiga⁽¹⁴⁾, ya que éstas difieren notablemente. En particular para la misma variable⁽¹⁵⁾, llega a dos Representaciones diferentes como son: ARMA (1,0,4) y ARMA (2,1,3), siendo las estimaciones de los parámetros de la primera:

$$f_1 \approx 0,978; t_1 \approx 0,243; t_2 \approx 0,069; t_3 \approx 0,05; t_4 \approx 0,069$$

y los de la segunda:

$$f_1 \approx 0,245; f_2 \approx -0,125; t_1 \approx 0,77; t_2 \approx 0,082; t_3 \approx -0,070.$$

En primer lugar demostraremos que la identificación que lleva a cabo no es adecuada porque las dos Representaciones son muy diferentes.

Para ello apliquemos la propiedad de inversión a (1,0,4) introduciendo la aproximación de tomar como nulos los valores de t_2 , t_3 y t_4 .

En estas condiciones, hemos simplificado la Representación (1,0,4) en una (1,0,1) y para ésta última:

$$(1-0,978B) y(t) = (1+0,243B) a_t$$

se puede escribir:

$$\begin{aligned} (1-0,978B)(1-0,243B+0,243^2B^2-0,243^3B^3+\dots) y(t) &= a_t \\ y(t)(1-(0,978+0,243)B-(-1)(0,978+0,243)0,243B^2 - \\ -(0,978+0,243)0,243B^2 + \dots) &= a_t \\ (1-1,221B+0,297B^2-0,072B^3+0,018B^4 \dots) y(t) &= a_t \end{aligned}$$

que vemos que, aproximadamente, corresponde a una AR(2)

$$(1-1,221B+0,297B^2) y(t) = a_t$$

si aplicamos, seguidamente, las mismas consideraciones a (2,1,3) teniendo en cuenta que t_2 y t_3 son de

valor reducido, la Representación resultante será (2,1,1), es decir:

$$(1-0,245B+0,125B^2) \Delta y(t)=a_t$$

$$(1-0,245B+0,125B^2)(1+0,77B+0,77B^2+\dots)\Delta y(t)=a_t$$

o sea:

$$(1-(0,245-0,77)B-(0,245\cdot 0,77-0,125-0,77^2)B^2 -$$

$$-(0,245\cdot 0,77-0,125\cdot 0,77^2)\cdot 0,77B^3-(0,245\cdot 0,77-$$

$$-0,125-0,77^2)0,77^2B^4+ \dots)\Delta y(t) = a_t$$

$$(1+0,525B+0,529B^2+0,408B^3+0,314B^4+\dots)\Delta y(t)=a_t$$

que equivale a una Representación Autorregresiva de orden muy superior a 2.

Por tanto vemos que Rodríguez Zúñiga llega a dos Representaciones completamente diferentes que son:

$$(1,0,4) \text{ ----- } (1,0,1) \text{ ----- } (2,0,0)$$

$$(1-1,221B+0,298B^2) y(t)=a_t$$

$$(2,1,3) \text{ ----- } (2,1,) \text{ ----- } (k\ 4,0,0)$$

$$(1+0,525B+0,592B^2+0,408B^3+0,317B^4+ \dots)\Delta y(t)=$$

$$=a_t$$

derivándose, a nuestro modo de ver, esta anomalía⁽¹⁶⁾ del empleo de un método de identificación no tan operativo como el que utilizamos en el presente trabajo.

No! llevamos a cabo una comparación entre las Representaciones a las que llega con la nuestra, puesto que se refieren a períodos diferentes, si bien habría entonces que preguntarse si existe una estructura estable que genere los datos.

Por último, para los datos que proporciona R. Zúñiga haciendo abstracción del problema de la estacionariedad y utilizando nuestro procedimiento de identificación llegaríamos a seleccionar para IPM la Representación (0,1,0), es decir:

$$\Delta x(t) = a_t$$

lo cual estaría de acuerdo con los resultados a los que llegamos para los restantes índices de precios al por mayor.

Una vez identificada la Representación que corresponde al índice general, IPM, pasamos a resolver el mismo problema para el resto de índices de precios al por mayor de que disponemos.

6.4.2) Alimentos, Bebidas y Tabacos (IPAT).

Los estadísticos elementales que se han obtenido para la serie original son los siguientes:

I.P.A.T.-

Media	242,395
d.t.	39,72
e.t.	3,52
Máximo	362,60
Mínimo	171,60
Recorrido	191,00

con estos valores y observando la evolución de esta variable, recogida en el cuadro 6-3, vemos que presenta una fuerte tendencia y no puede ser considerada, por tanto, como estacionaria. Esta misma conclusión se obtiene si inspeccionamos el correlograma de la serie que aparecen en el cuadro 6-23.

Tomando la primera diferencia de esta variable los estadísticos resultantes son:

Δ I.P.A.F.-

Mé dia	1,54
d.t.	3,220
e.t.	0,28
Máximo	13,80
Mínimo	6,80
Recorrido	20,60

Si además tenemos en cuenta los datos referentes a esta diferencia y su correlograma expuestos en los cuadros 6-4 y 6-24 podemos considerar la primera diferencia del índice de precios al por mayor de alimentos, bebidas y tabacos, Δ IPAT, como adecuada a nuestros propósitos.

Identificación: Para facilitar la identificación resumimos aquí, los seis primeros valores de la función de autocorrelación y de la función de autocorrelación parcial, que en forma más completa se recogen en los cuadros 6-24 y 6-25.

Δ I.P.A.T.-

<u>Retardo(k)</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	0,096	0,096
2	0,117	0,109
3	0,157	0,139
4	0,180	0,150
5	0,181	0,138
6	0,164	0,102

Del análisis de la tabla anterior parece deducirse que la variable, $\Delta IPAT$, es completamente aleatoria. Esta conclusión se apoya en los valores que toman las desviaciones típicas de las estimaciones de los coeficientes de autocorrelación y función de autocorrelación parcial, si suponemos que se trata, efectivamente, de "ruido blanco".

$$\text{var } r(k) = \frac{1}{126} \approx 0,08 \quad \text{d.t. } r(k) \approx 0,09$$

$$\text{var } f_{kk} \approx \frac{1}{126} \approx 0,08 \quad \text{d.t. } f_{kk} \approx 0,09$$

con lo cual los límites 2σ son aproximadamente, 0,18.

Si por otra parte calculamos el test Q de Box y Pierce⁽¹⁷⁾, tendremos que:

$$Q = N \sum_{k=1}^K r^2(k) = 126 \sum_{k=1}^{22} r^2(k)$$

Y dado que $\sum_{k=1}^{22} r^2(k) \approx 0,396$, el valor del citado test será: $Q \approx 49,86$, si la serie fuera completamente aleatoria, Q provendría de una distribución χ^2 con $k-k_1-k_2$ grados de libertad. Por tanto, en nuestro caso $Q \approx 49,86$ debería estar asociado a una χ^2 con veintidos grados de libertad. Pero para veintidos grados de libertad los valores correspondientes al 10% y 5% son, respectivamente, 30,8 y 33,9. Por consiguiente la variable no puede considerarse como puramente aleatoria.

Es decir, por una parte, en base a la función de autocorrelación y autocorrelación parcial llegamos a la conclusión de que $\Delta IPAT$ es completamente aleatoria, mientras que si seguimos el criterio del

test Q, basado en la función de autocorrelación considerada globalmente, nuestra variable no lo es.

Si pasamos a identificar en base a la comparación de los espectros, vemos que el estimado, que aparecen en el gráfico 6-4, salvo una ligera concentración de la varianza, en la banda de frecuencias (0;0,031) la importancia del resto de bandas de frecuencia es prácticamente similar, indicativo de que corresponde al espectro de una variable aleatoria.

No obstante si queremos recoger la información suministrada por la pequeña concentración de varianza en las proximidades del origen, podríamos sugerir que se trata de una forma autorregresiva de segundo orden.

Concretamente con los valores numéricos de $r(1)$ y $r(2)$ y el gráfico 5-4 obtenemos:

$f_1 \simeq 0,096$ $f_2 \simeq 0,117$
por tanto la estimación de σ^2 será:

$$\sigma^2 = 10,355(1 - 0,096^2 - 0,117^2) \simeq 10,12$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{10,12}{n} \simeq 3,22$$

$$g(w) \text{ nor max} \simeq \frac{8}{3,22} \simeq 2,48$$

siendo las ordenadas teóricas:

$$g(w) \text{ nor max} = \frac{1}{1 + 0,096^2 + 0,117^2 + 2 \cdot 0,096(0,117 - 1) - 2 \cdot 0,117} \simeq$$

$$\simeq 1,61$$

$$g(w) \text{ nor } \min \approx \frac{1}{1+0,096^2+0,117^2+2.0,117} \approx 0,80$$

valores que no coinciden con los estimados.

Por otra parte si comparamos la forma del espectro teórico que está comprendida entre las de (0,01) y (0,0,3), que presentan una forma de "U", vemos que no es posible admitir este tipo de Representación.

Por consiguiente admitimos como Representación más idónea para la primera diferencia del índice de precios al por mayor de alimentos, bebidas y tabacos la que corresponde a una variable puramente aleatoria.

Antes de dar por finalizada la identificación debemos averiguar si debe introducirse una tendencia determinista.

En este caso la media de la variable es 1,54, siendo su error típico 0,28, que lo obtenemos directamente de la tabla correspondiente a sus estadísticos elementales, por tanto, es conveniente tomar en consideración la presencia de la tendencia determinista.

Por tanto, la Representación será:

$$\Delta IPAT_t - 1,54 = a_t$$

6.4.3) Productos agrícolas (IPPA).

Los datos correspondientes a esta variable se encuentran en el cuadro 6-5, a partir de la cual se han calculado sus estadísticos elementales, cuyos valores recogemos a continuación:

I.P.P.A.-

Media	234,122
d.t.	33,752
e.t.	2,99
Máximo	332,200
Mínimo	168,700
Recorrido	176,800

Todo lo anterior junto con el correlograma de la variable (cuadro 6-23) nos permite constatar la existencia de una fuerte tendencia, que clasifica la serie dentro de las no estacionarias.

Tomando, pues, la primera diferencia de la serie obtenemos la variable, Δ IPPA, cuyos datos aparecen en el cuadro 6-6 y siendo sus estadísticos elementales los siguientes:

Δ I.P.P.A.-

Media	1,313
d.t.	4,440
e.t.	0,394
Máximo	14,700
Mínimo	10,300
Recorrido	25,000

Por consiguiente, podemos considerarla como estacionaria.

Identificación: Para llevar a cabo la identificación, resumimos una vez más, los seis primeros valores de la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial derivadas de los cuadros 6-24 y 6-25 respectivamente.

Δ I.P.P.A.-

<u>-k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	-0,091	-0,091
2	-0,048	-0,057
3	-0,022	-0,032
4	0,035	0,027
5	0,217	0,223
6	-0,054	-0,007

De la tabla anterior se puede inferir que se trata de una variable puramente aleatoria puesto que los valores estimados son sensiblemente menores que las desviaciones típicas correspondientes.

$$\text{var } r(k) \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008 \quad \text{d.t. } r(k) \simeq 0,089$$

$$\text{var } f_{kk} \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008 \quad \text{d.t. } f_{kk} \simeq 0,089$$

y los límites 2σ son, aproximadamente 0,18.

Si para mayor seguridad calculamos otra vez el valor de Q, tendremos:

$$Q = N \sum_{k=1}^{22} r^2(k) \simeq 126.0,140 \simeq 17,607$$

que debe provenir de una distribución χ^2 con veintidos grados de libertad.

Acudiendo a las tablas correspondientes observamos que los valores correspondientes al 5% y 10% son, respectivamente: 33,9 y 30,8. Por consiguiente en esta ocasión el test también confirma el diagnóstico previo de que tratamos con una variable puramente aleatoria.

Si examinamos, a continuación, el espectro estimado que está representado en el gráfico 6-3, vemos que al igual que para la anterior, se trata del correspondiente a una variable aleatoria puesto que, salvo el efecto de escala que exagera las variaciones, la importancia de las distintas bandas de frecuencias es bastante similar, pudiendo trazarse también la media de las ordenadas espectrales que muy aproximadamente corresponde con una paralela al eje de las frecuencias. Además, si examinamos el gráfico de la pag. 212 de Jenkins y Watts⁽¹⁸⁾ en el que está representado el espectro correspondiente a una muestra proveniente de una realización de "ruido blanco" con distribución Normal discreta, podemos observar su similaridad.

Por consiguiente identificamos Δ IPPA con una variable puramente aleatoria.

Debe, también, incorporarse la tendencia determinista puesto que el valor medio es 1,313 y el de e.t. igual a 0,394.

Afortunadamente, también en este caso, existe la posibilidad de comparación con la realizada por R. Rodríguez Zúñiga⁽¹⁹⁾, haciendo abstracción del diferente ámbito temporal y el que este autor no corrija sus series de estacionalidad.

Las identificaciones a las que llega son las siguientes: (2,1,1) y (1,0,4). Coincidiendo una de ellas (1,0,4), con otra de las obtenidas para el índice de precios al por mayor. Por tanto a ésta última le es de aplicación lo dicho en el epígrafe referente al índice de precios al por mayor. Es decir,

$$(1,0,4) \longrightarrow (1,0,1) \longrightarrow (2,0,0)$$

Veamos que sucede con la (2,1,1). Los parámetros correspondientes son:

$$f_1 \simeq 0,215 \quad t_1 \simeq 0,084$$

$$f_2 \simeq 0,032$$

Por consiguiente:

$$(1-0,215B-0,032B^2) \Delta IPPA = (1-0,084B) a_t$$

aplicando la propiedad de inversión, y dado lo reducido del valor de f_2 y t_1 , se deduce que la Representación anterior se transforma en:

$$(1-0,215B) \Delta IPPA = a_t$$

Es decir:

$$(1,0,4) \longrightarrow (1,0,1) \longrightarrow (2,0,0)$$

siendo, en concreto:

$$(1-1,221B+0,297B^2) IPPA = a_t$$

mientras que la otra Representación es:

$$(2,1,1) \text{ -----} \rightarrow (1,1,0)$$

$$(1-0,215B) \Delta \text{IPPA} = a_t$$

siendo, otra vez, diferentes las dos Representaciones a las que llega.

En este caso concreto la segunda identificación que consigue $(2,1,1)$, que hemos visto es básicamente una $(1,1,0)$, dado la reducción del parámetro $f_1 \approx 0,215$, puede suponerse que de haber sido ajustada para el mismo período y corregida de estacionalidad posiblemente hubiese alcanzado nuestro mismo resultado.

De todas formas vemos, una vez más, que su procedimiento de identificación no es operativo puesto que entre los dos resultados tan dispares, como a los que llega, no puede seleccionar uno.

6.4.4) Productos agrícolas industrializados (IPAI).

Con esta variable agotamos el conjunto de las componentes de índices de precios al por mayor que presenta el "Suplemento al Boletín Mensual de Estadística" en su avance de series desestacionalizadas.

Los datos se encuentran en el cuadro 6-7, el correlograma en el cuadro 6-23 y los estadísticos elementales calculados, han dado los resultados siguientes:

I.P.A.I.-

Media	219,291
d.t.	37,577
e.t.	3,33
Máximo	343,500
Mínimo	166,700
Recorrido	176,800

Por consiguiente, no podemos considerarla como estacionaria. Si pasamos a obtener la primera diferencia de la serie (cuadro 6-8) y calculamos sus estadísticos elementales, obtendremos:

 Δ I.P.A.I.-

Media	1,401
d.t.	4,432
e.t.	0,393
Máximo	36,500
Mínimo	13,300
Recorrido	49,800

con lo que ya podemos considerar a, Δ IPAI, como apta y proceder a su identificación.

Identificación: Resumimos, a continuación, sus funciones de autocorrelación y de autocorrelación parcial, obtenidas de los cuadros 6-24 y 6-25 respectivamente.

 Δ I.P.A.I.-

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	0,142	0,142
2	0,190	0,173
3	-0,007	-0,007
4	-0,112	-0,152
5	-0,024	-0,061
6	0,066	0,006

las desviaciones típicas de las estimaciones de los coeficientes de autocorrelación y de autocorrelación parcial, si suponemos que se trata de "ruido blanco", vendrán dadas por:

$$\text{var } r(k) \simeq \frac{1}{N} \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008$$

$$\text{var } f_{kk} \simeq \frac{1}{N} \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008$$

y por tanto las desviaciones típicas serán:

$$\sigma = 0,089 \quad 2\sigma = 0,18$$

En estas condiciones vemos que puede considerarse que los coeficientes de autocorrelación y autocorrelación parcial no son significativamente diferentes de cero.

Si para mayor seguridad calculamos el "Q" correspondiente resulta:

$$Q = N \sum_{k=1}^{22} r(k)^2 \simeq 126 \cdot 0,350 \simeq 44,160$$

que debería provenir de una χ^2 con veintidos grados de libertad. Ahora bien para esta distribución los puntos correspondientes al 5% y 10% son 33,9 y 30,8.

Por consiguiente el test de Q rechaza que la variable, $\Delta I P A I$, consista en ruido blanco.

En estas condiciones recurrimos a comparar los espectros para llevar a cabo la identificación.

El espectro estimado está representado en el gráfico 6-4 y en el observamos que se asemeja al de una variable puramente aleatoria, dado que, aproximadamente, la contribución a la varianza total es la misma en las distintas bandas de frecuencia.

Sin embargo si queremos asegurarnos, veamos que sucede si suponemos que sigue un $AR(2)^{(20)}$.

A partir del gráfico 5-4 con los valores $r(1) = 0,142$ y $r(2) = 0,19$ obtenemos: $f_1 \simeq 0,1; f_2 \simeq 0,19$. Por tanto, la estimación de la varianza residual será:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= c_0(1 - f_1 r(1) - f_2 r(2)) = 19,64(1 - 0,1 \cdot 0,142 - 0,19 \cdot 0,19) \simeq \\ &\simeq 18,47.\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \simeq \frac{18,47}{n} \simeq 5,88$$

$$g(w) \text{ nor max} \simeq \frac{10}{5,88} \simeq 1,7$$

$$g(w) \text{ nor min} \simeq \frac{3,5}{5,88} \simeq 0,6$$

las ordenadas teóricas correspondientes serían:

$$g(w) \text{ nor max} \simeq \frac{1}{1 + 0,1^2 + 0,19^2 + 2 \cdot 0,1(0,19 - 1) - 2 \cdot 0,19} \simeq 1,98$$

$$g(w) \text{ nor min} \simeq \frac{1}{1 + 0,1^2 + 0,19 + 2 \cdot 0,19} \simeq 0,70$$

valores que son bastante coincidentes con los estimados.

Además, el valor del mínimo en el espectro teórico viene dado por:

$$w = \ar \cos \frac{f_1(f_2-1)}{4f_2} \simeq \ar \cos \frac{0,1(0,19-1)}{4 \cdot 0,19} \simeq 1,68 \text{ rad}$$

que corresponde a una frecuencia de 0,267, muy similar a la del gráfico 6-4.

Consiguientemente, admitimos como identificación más correcta la correspondiente a la AR(2).

Las varianzas de los parámetros estimados vienen dadas, de acuerdo con 5.2.1.1):

$$\begin{aligned} \text{var}[f] &= \frac{1-r(1)f_1-r(2)f_2}{N(1-r(1)^2)} \begin{bmatrix} 1 & -r(1) \\ -r(1) & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1-0,142^2-0,19^2}{126(1-0,142^2)} \begin{bmatrix} 1 & -0,142 \\ -0,142 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por tanto, $\text{var } f_1 = 0,0076$

$\text{var } f_2 = 0,0076$

y sus desviaciones típicas correspondientes:

$$\text{d.t. } f_1 = \text{d.t. } f_2 = 0,0874$$

Vemos aquí el porqué puede identificarse la variable, ΔIPAI , como ruido blanco ya que el valor de los parámetros se sitúa dentro de los límites 2σ .

Por último tenemos que analizar la conveniencia o no de incorporar una tendencia determinista.

De acuerdo con 4.5) se tiene:

$$e.t. \simeq \left(\frac{c_0 \frac{1+r(1)}{1-r(2)} + r(2)}{N \frac{1+r(1)}{1-r(2)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

por tanto,

$$e.t. \simeq \left(\frac{19,64(1+0,142)(1-2 \cdot 0,142^2 + 0,19)}{126(1-0,142)(1-0,19)} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0,542$$

y dado que la media de la variable es 1,40 aceptamos la introducción de la tendencia determinista.

En resumen: la variable $\Delta IPAI$ queda representada por:

$$\begin{aligned} (1-0,142B-0,19B^2)(\Delta IPAI_t - 1,4) &= a_t \\ (0,008) \quad (0,008) \end{aligned}$$

que se aproxima a:

$$\Delta IPAI_t - 1,4 \simeq a_t$$

por tanto las Representaciones identificadas por los precios al por mayor son:

$$\begin{aligned} \Delta IPM &\text{———} (2,0,0) \\ \Delta IPAT &\text{———} (0,0,0) \\ \Delta IPPA &\text{———} (0,0,0) \\ \Delta IPAI &\text{———} \begin{cases} (2,0,0) \\ (0,0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

6.5) Indices del coste de la vida.

Son estos verdaderos indices de precios al por menor, y, por consiguiente, es interesante identificar su estructura para completar los indices de pre-

cios.

En este trabajo hemos elegido dos representantes, el índice general del coste de la vida, ICV, y el índice del grupo general: Alimentación.

6.5.1) Índice general del coste de la vida (ICV).

Los datos correspondientes a esta variable están recogidos en el cuadro 6-9. En él se puede observar que presenta una tendencia muy marcada, aspecto que se recalca examinando el cuadro 6-23. Para completar su descripción calculamos los estadísticos elementales que se recogen a continuación.

I.C.V.-

Media	110,731
d.t.	24,604
e.t.	2,110
Máximo	177,300
Mínimo	72,800
Recorrido	104,500

por tanto, la variable ICV no puede ser considerada como estacionaria, lo cual se reafirma si observamos el correlograma en el cuadro 6-23. Siguiendo con nuestra sistemática pasamos a calcular la primera diferencia de la variable anterior, cuyos datos se recogen en el cuadro 6-10, y a obtener sus estadísticos elementales que dan como resultado:

$\Delta I.C.V.-$

Media	0,831
d.t.	0,870
e.t.	0,077
Máximo	5,300
Mínimo	-1,200
Recorrido	6,500

con lo cual, ya podemos suponer como estacionaria la primera diferencia del índice del coste de la vida.

Identificación: Para proceder a su identificación en primer lugar, resumimos sus funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial obtenidas de los cuadros 6-24 y 6-25.

 $\Delta I.C.V.-$

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	0,390	0,390
2	0,440	0,340
3	0,419	0,231
4	0,418	0,182
5	0,316	0,006
6	0,347	0,064

la desviación típica correspondiente a las estimaciones de los coeficientes de autocorrelación parcial viene dada por:

$$\text{var } f_{kk} \approx \frac{1}{N} = \frac{1}{126} \approx 0,0079$$

$$\text{d.t. } f_{kk} \approx (0,0079)^2 \approx 0,089$$

por lo que, el doble de la desviación típica toma como valor: 0,18.

En estas condiciones, los coeficientes de autocorrelación parcial no son significativamente diferentes de cero a partir del cuarto o quinto término.

Por otra parte tenemos que la varianza correspondiente a los distintos coeficientes de autocorrelación, si suponemos, por ejemplo, que son nulos a partir del cuarto término será:

$$\text{var } r(k) = \frac{1}{126} (1 + 2(0,39^2 + 0,44^2 + 0,419^2 + 0,418^2)) = 0,03$$

y su desviación será: d.t. $r(k) \simeq 0,171$.

Por tanto los términos de la función de autocorrelación, también, son diferentes de cero hasta retardos elevados.

Como conclusión del análisis anterior vemos que el procedimiento de identificación de Box y Jenkins nos proporcionaría una estructura de tipo Autorregresivo de cuarto o quinto orden, lo cual está en desacuerdo con las observaciones, ya comentadas, que las series económicas siguen representaciones más sencillas.

Si ahora nos fijamos en su espectro estimado, representado en el gráfico 6-5, vemos que presenta una concentración de varianza en la primera banda de frecuencias (0; 0,063) y que la relación entre la ordenada máxima y mínima es:

$$\frac{1,54}{0,08} \simeq 19,25$$

Con esta información recurrimos a la comparación del espectro estimado con alguno de los teóricos representados.

En primer lugar, observamos que no pueden consistir en Representaciones de primer orden puesto que, para los valores de los parámetros que les correspondería, la forma del espectro teórico, y su relación entre las ordenadas máxima y mínima no es la adecuada.

Pero por lo que respecta a las de segundo orden el panorama cambia dado que, el espectro correspondiente a la AR(2) con parámetros próximos a : $f_1 \approx 0,4$ $f_2 \approx 0,4$, se aproxima en forma y en la relación, entre las ordenadas máxima y mínima, al estimado.

Si con los coeficientes de autocorrelación estimados, recurrimos al gráfico 5-4, podemos calcular las correspondientes a f_1 y f_2 , que resultan ser : $f_1 \approx 0,28$ $f_2 \approx 0,36$.

Con estos valores numéricos calculemos las ordenadas espectrales normalizadas:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= c_0(1-f_1r(1)-f_2r(2)) = \\ &= 0,757(1-0,38 \cdot 0,39-0,36 \cdot 0,44) \approx 0,554 \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 0,176$$

$$\left. \begin{aligned} g(w) \text{ nor max} &\approx \frac{1,54}{0,176} \approx 8,726 \\ g(w) \text{ nor min} &\approx \frac{0,08}{0,087} \approx 0,455 \end{aligned} \right\} 19,24$$

Los resultados teóricos deberían ser:

$$g(w) \text{ nor max} =$$

$$= \frac{1}{1+0,8^2+0,36^2+2 \cdot 0,28(0,36-1)-2 \cdot 0,36} \approx 7,7$$

$$g(w) \text{ nor min} =$$

$$= \frac{1}{1+0,28^2+0,36^2-2 \cdot 0,28(0,36-1)+2 \cdot 0,36} \approx 0,437$$

} 22,31

valores que concuerdan sensiblemente con los calculados por nosotros.

A continuación es conveniente estudiar la posibilidad de que se trate de una Media Móvil de segundo orden, MV(2), o bien de una Representación Mixta ARMA(1,1). Por lo que respecta a la primera los perfiles de evolución son muy suaves en comparación con la forma del espectro estimado, y además, las ordenadas espectrales máxima y mínima que tendríamos, no concuerdan con las del espectro estimado. Comprobemoslo.

Con $r(1) \approx 0,39$ y $r(2) \approx 0,44$, a través del gráfico 5-5 obtenemos:

$$t_1 \approx -0,45 \quad t_2 \approx -0,65$$

por tanto,

$$g(w) \text{ nor max} = 1+t_1^2+t_2^2+2t_1(t_2-1)\cos w-2t_2 \cos 2w \Big|_{w=0} =$$

$$= 1+0,45^2+0,65^2+2 \cdot 0,45(0,65+1)+2 \cdot 0,65 \approx 4,41$$

$$g(w) \text{ nor min} = 1+t_1^2+t_2^2-2t_2 \Big|_{w=\pi/2} = 1+0,45^2+0,65^2-2 \cdot 0,65 \approx$$

$$\approx 0,35$$

por consiguiente no la consideramos como adecuada.

La Representación Mixta, tampoco nos parece correcta puesto que, si bien su perfil de evolución se asemeja al de nuestra variable, los valores de los parámetros obtenidos a partir del gráfico 5-6 dan estimaciones⁽²¹⁾, $\hat{f}_1 \simeq 0,95$ y $t_1 \simeq 0,93$, y con estos valores resulta bastante aproximada a una variable aleatoria. Veámoslo:

$$(1-0,95B) x(t) = (1-0,93B) a_t$$

y aplicando la propiedad de inversión:

$$(1-0,95B)(1-0,93B)^{-1} x(t) = a_t$$

$$(1-0,95B)(1+0,93B+0,93^2B^2+\dots) x(t) = a_t$$

y simplificando tendremos:

$$(1-0,95-0,93B)-(0,95-0,93) 0,93B^2-(0,95-0,93) 0,93^2B^2+\dots) x(t) = a_t$$

$$(1-0,02B-0,019B^2-0,17B^3-0,016B^4 \dots) x(t) = a_t$$

que puede aproximarse en: $x(t) \simeq a_t$.

Este resultado, anómalo, es consecuencia de no haber estimado en forma adecuada los parámetros f_1 y t_1 , puesto que a través de la propiedad de inversión debíamos haber llegado a valores más próximos a los estimados para f_1 y f_2 .

Además, las ordenadas espectrales máxima y mínima tampoco concuerdan puesto que:

$$\begin{aligned} g(w) \text{ nor max} &\simeq \frac{1-2t_1 \cos w + t_1^2}{1-2f_1 \cos w + f_1^2} \Big|_{w=0} = \\ &= \frac{1-2 \cdot 0,93 + 0,93^2}{1-2 \cdot 0,95 + 0,95^2} \simeq 1,96 \end{aligned}$$

$$g(w) \text{ nor min } \simeq \frac{1-2t_1 \cos w + t_1^2}{1-2f_1 \cos w + f_1^2} \bigg|_{w=\pi} =$$

$$= \frac{1+2 \cdot 0,93+0,93^2}{1+2 \cdot 0,95+0,95^2} \simeq 0,98$$

Por consiguiente, identificamos como Representación más adecuada para el índice del coste de la vida, una de tipo Autorregresivo aplicada a su primera diferencia. Concretamente:

$$(1-0,28B-0,36B^2)(\Delta ICV - \overline{\Delta ICV}) = a_t$$

Una vez identificada la Representación, podemos pasar a obtener las varianzas de los parámetros estimados.

De acuerdo con 5.2.1.1):

$$\text{var}[f_1] = \frac{1-r(1)f_1-r(2)f_2}{N 1-r(1)^2} \begin{bmatrix} 1 & -r(1) \\ -r(1) & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1-0,39 \cdot 0,28-0,44 \cdot 0,36}{126(1-0,39^2)} \begin{bmatrix} 1 & -0,39 \\ -0,39 & 1 \end{bmatrix}$$

por tanto:

$$\text{var } f_1 \simeq 0,007 \qquad \text{var } f_2 \simeq 0,007$$

$$\text{d.t. } f_1 = \text{d.t. } f_2 \simeq 0,083$$

Por último debemos examinar si hay que incorporar una tendencia determinista.

$$e.t. \approx \left(\frac{c_o \frac{1+r(1)}{N} \frac{1-2r(1)+r(2)}{1-r(1)} \frac{1-r(2)}{1-r(2)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{0,757(1+0,39)(1-2 \cdot 0,39+0,44)}{126(1-0,39)(1-0,44)} \approx 0,127$$

y como el valor estimado de la media de la primera diferencia de, ICV, es 0,831, concluimos que la tendencia debe ser tenida en cuenta.

Por consiguiente:

$$\frac{(1-0,28B - 0,36B^2)}{(0,083) (0,083)} (\Delta ICV - 0,831) = a_t$$

6.5.2) Indice grupo general. Alimentación (ICVA).

Los datos correspondientes a esta variable están detallados en el cuadro 6-11. Los estadísticos elementales correspondientes presentan los siguientes valores:

I.C.V.A.-

Media	110,39
d.t.	22,94
e.t.	2,03
Máximo	174,40
Mínimo	73,40
Recorrido	101,00

Del análisis de los datos, del correlograma, cuadro 6-23, y de estos estadísticos llegamos a la conclusión de que no se trata de una variable estacionaria. Por consiguiente pasamos a calcular su primera diferencia, $\Delta ICVA$.

Los datos de esta nueva variable, $\Delta ICVA$, se recogen en el cuadro 6-12 y sus estadísticos elementales son los que a continuación se detallan:

$\Delta I.C.V.A.-$

Media	0,809
d.t.	1,31
e.t.	0,12
Máximo	7,10
Mínimo	2,40
Recorrido	9,50

Por tanto, podemos considerar como estacionaria a esta variable, y proceder seguidamente a identificar su Representación más adecuada.

Identificación: Para resolver este problema y contrastar, como estamos haciendo, los procedimientos de identificación, llevamos a cabo, en primer lugar el de Box y Jenkins y en segundo lugar el aquí propuesto.

Por tanto, resumimos a continuación las estimaciones correspondientes a los coeficientes de autocorrelación y autocorrelación parcial, de los primeros seis primeros términos de los cuadros 6-24 y 6-25.

$\Delta I.C.V.A.-$

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	0,111	0,111
2	0,270	0,261
3	0,079	0,030
4	0,188	0,118
5	0,007	-0,047
6	0,180	0,118

Suponiendo que la función de autocorrelación se anula a partir del segundo término, la varianza de las estimaciones será:

$$\text{var } r(k) = \frac{1}{126} (1 + 2(0,111^2 + 0,27^2)) \simeq 0,09$$

y por tanto,

$$\text{d.t. } r(k) \simeq 0,096$$

La correspondiente a las estimaciones de la función de autocorrelación parcial es:

$$\text{var } f_{kk} \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008$$

$$\text{d.t. } f_{kk} \simeq 0,089$$

siendo los límites 2σ, 0.193 y 0.18 respectivamente.

De los resultados anteriores vemos que con excepción de los coeficientes de segundo orden todos los demás pueden considerarse como estadísticamente nulos. No obstante la función de autocorrelación presenta términos como, $r(8)$, claramente diferentes de cero y por lo que respecta a la de autocorrelación parcial sucede lo mismo.

En todo caso a través del primer procedimiento de identificación no sabríamos, en principio si seleccionar un MV(2), AR(2).

Si pasamos a examinar su espectro estimado que está representado en el gráfico 6-6, vemos que presenta una forma de "U" muy abierta y que la rela--

ción entre sus ordenadas máxima y mínima es:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}} = \frac{1,68}{0,28} \approx 6$$

y, por tanto, se conforma tanto con una AR(2) como MV(2).

Supongamos, en principio, que se trata de una AR(2). En estas condiciones con los valores numéricos de $r(1)$ y $r(2)$ y mediante el gráfico 5-4 obtenemos: $f_1 \approx 0,1$ y $f_2 \approx 0,27$.

La estimación de la varianza residual vendrá dada por:

$$\sigma^2 = c_0(1 - f_1 r(1) - f_2 r(2)) = 1,72(1 - 0,1 \cdot 0,111 - 0,27^2) \approx 1,58$$

por tanto: $\frac{\sigma^2}{n} \approx 0,50$

$$g(w) \text{ nor max} \approx \frac{1,68}{0,5} \approx 3,35$$

$$g(w) \text{ nor min} \approx \frac{0,28}{0,5} \approx 0,56$$

alcanzándose el mínimo en:

$$w = \arccos \frac{f_1(f_2 - 1)}{4f_2} = \arccos \frac{0,1(0,27 - 1)}{4 \cdot 0,27} = 1,64 \text{ radianes}$$

correspondiente a una frecuencia de 0,261.

En esta ocasión es difícil compararlo con el estimado puesto que su espectro aparece como bastan-

te plano en las frecuencias intermedias.

Calculemos ahora las ordenadas teóricas máxima y mínima.

$$g(w)_{\text{nor max}} = \frac{1}{1+0,1^2+0,27^2+2 \cdot 0,1(0,27-1)-2 \cdot 0,27} \approx 2,52$$

$$g(w)_{\text{nor min}} = \frac{1}{1+0,1^2+0,27^2+2 \cdot 0,27} \approx 0,616$$

siendo su relación aproximadamente igual a 4,1.

Con ello vemos que los valores teóricos se aproximan razonablemente bien a los estimados. Por tanto aceptamos, en principio, esta Representación.

Estudiemos, a continuación, lo que sucede con la MV(2).

Con los valores de los coeficientes $r(1)$, $r(2)$ y el gráfico 5-5 obtenemos:

$$t_1 \approx 0,12 \quad t_2 \approx 0,31$$

por consiguiente:

$$\sigma^2 = \frac{c_0}{1+t_1^2+t_2^2} \approx \frac{1,72}{1+0,12^2+0,31^2} \approx 1,55$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 0,49$$

$$g(w)_{\text{nor max}} \approx \frac{1,68}{0,49} \approx 3,41$$

$$g(w) \text{ nor min } \simeq \frac{0,28}{0,49} \simeq 0,57$$

que son similares con los provenientes de suponer una Representación Autorregresiva de segundo orden.

Las ordenadas teóricas serán:

$$\begin{aligned} g(w) \text{ nor max} &= 1+t_1^2+t_2^2+2t_1(t_2-1)\cos w-2t_2 \cos 2w= \\ &= 1+0,12^2+0,31^2+2.0,12(0,31+1)+2.0,31 \simeq 2,04 \end{aligned}$$

$$g(w) \text{ nor min } \simeq 1+0,12^2+0,31^2-2.0,13 \simeq 0,49$$

por consiguiente son similares a las obtenidas en el caso de una AR(2), aunque algo más bajas.

En este caso es muy fácil el probar que las dos Representaciones que hemos identificado son semejantes puesto que a partir de la Autorregresiva:

$$(1-0,1B-0,27B^2)=(1-0,57B)(1+0,472B)$$

por tanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-0,572B)^{-1}(1+0,472B)^{-1}a_{t=} \\ &= (1+0,1B+0,28B^2+0,054B^3+ \dots) a_t \\ &\quad (1+0,1B+0,28B^2) a_t \end{aligned}$$

es decir, es similar a una Media Móvil de segundo orden con parámetros $t_1 \simeq 0,1$ y $t_2 \simeq 0,28$, muy próximos a los estimados directamente.

Suponiendo, pues, que se trata de una AR(2) calculemos las varianzas y desviaciones típicas asocia-

das a los parámetros.

De acuerdo con 5.2.1.1):

$$\text{var } f_1 = \text{var } f_2 = \frac{1-r(1)f_1-r(2)f_2}{N 1-r(1)^2} \approx$$

$$\approx \frac{1-0,111 \cdot 0,1-0,27^2}{126(1-0,111^2)} \approx 0,007$$

$$\text{d.t. } f_1 = \text{d.t. } f_2 \approx 0,085$$

A continuación, debemos preguntarnos acerca de la conveniencia de tomar en consideración una tendencia determinista. Para ello:

$$\text{e.t.} = \left(\frac{c_o \frac{1+r(1)}{N 1-r(1)} \frac{1.2r(1)+r(2)}{1-r(2)}}{N 1-r(1)} \right)^{\frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx \frac{1,72(1+0,111)(1-2 \cdot 0,111+0,27)}{126(1-0,111)(1-0,27)}^{\frac{1}{2}} \approx 0,156$$

y dado que la media estimada de la primera diferencia de ICVA es 0,809, tenemos que admitir como conveniente la presencia de la tendencia determinista.

En resumen:

$$(1-0,1B-0,27B^2)(\Delta \text{ICVA}-0,809) = a_t \\ (0,085)(0,085)$$

6.6) Oferta Monetaria (M).

Esta variable se recoge en el cuadro 6-13. Los estadísticos elementales asociados son los siguientes:

M.-

Media 722,302
 d.t. 337,014
 e.t. 29,905
 Máximo 1536,200
 Mínimo 321,700
 Recorrido 1214,500

Por consiguiente, no puede ser considerada como estacionaria, opinión que se refuerza viendo su correlograma en el cuadro 6-23. Por ello calculamos su primera diferencia, que aparece en el cuadro 6-14. Sus estadísticos elementales son los siguientes:

M.-

Media 9,580
 d.t. 9,377
 e.t. 0,835
 Máximo 48,700
 Mínimo -7,600
 Recorrido 56,300

variable, que en principio, podemos ya considerar como adecuada.

Identificación: En los cuadros 6-24 y 6-25 se encuentran, in extenso, los coeficientes de autocorrelación y de autocorrelación parcial de los cuales reproducimos, aquí, los seis primeros valores.

M.-

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	0,379	0,379
2	0,460	0,369
3	0,553	0,409
4	0,409	0,131
5	0,466	0,228
6	0,564	0,269

Con los resultados anteriores a través del primer procedimiento de identificación⁽²²⁾ se elegiría, exclusivamente, una Representación Mixta ARMA(1,1)⁽²³⁾.

Si, por el contrario, examinamos el espectro estimado, gráfico 6-~~7~~, vemos que su forma puede ser la de un AR(2) o ARMA (1,1).

La relación entre las ordenadas máxima y mínima es, en este caso:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}} \simeq \frac{227}{10} \simeq 22$$

Con este dato y la forma podríamos identificarla, a priori, como una AR(2) con parámetros próximos a $f_1 \simeq 0,4$ y $f_2 \simeq 0,4$.

Para verificarlo acudimos al gráfico 5-4 que con los valores de los coeficientes de autocorrelación de primer y segundo orden $r(1) \simeq 0,379$ y $r(2) \simeq 0,460$, obtenemos:

$$f_1 \simeq 0,25 \qquad f_2 \simeq 0,37$$

Pasamos, a continuación, a normalizar el espectro:

$$\sigma^2 = c_0 (1 - f_1 r(1) - f_2 r(2))$$

$$c_0 = 9,377^2 = 87,92$$

$$\sigma^2 = 87,92(1 - 0,35 \cdot 0,379 - 0,46 \cdot 0,37) = 64,63$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \simeq 20,57$$

por tanto,

$$g(w), \text{ nor max } \simeq \frac{227}{21,37} \simeq 11,04$$

$$g(w) \text{ nor min } \simeq \frac{10}{21,37} \simeq 0,49$$

que no coincide con las correspondencias del espectro teórico AR(2) $f_1 \simeq 0,4$, $f_2 \simeq 0,4$ y que, por otra parte, el AR(2) con $f_1 \simeq 0,4$ y $f_2 \simeq 0,3$, cuyos valores se aproximan a los estimados por nosotros, tiene una forma no adecuada.

Como posterior comprobación pasamos a calcular las ordenadas máxima y mínima del espectro teórico, que en forma aproximada podemos calcular por:

$$g(w) \text{ nor max } \Big|_{w=0} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w} =$$

$$= \frac{1}{1+0,25^2+0,36^2+2\cdot 0,25(0,36-1)-2\cdot 0,36} \simeq 6,545$$

$$g(w) \text{ nor min } \Big|_{w=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2-2f_1-2f_2} \simeq 0,523$$

ordenadas que no coinciden con las estimadas. Pasemos, pues, a analizar la Representación Mixta ARMA (1,1).

A través del gráfico 5-6, obtenemos las estimaciones de f_1 y t_1 , también en este caso algo arduas de obtener.

Los valores aproximados a los que llegamos son:

$$f_1 \simeq 0,95 \qquad t_1 \simeq 0,84$$

Con estos valores:

$$\sigma^2 = c_0 \frac{1-f_1^2}{1+t_1^2-2f_1t_1} = 87,92 \frac{1-0,95^2}{1+0,84^2-2 \cdot 0,95 \cdot 0,84} = 78,234$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 24,84$$

por tanto,

$$g(w) \text{ nor max } \approx \frac{227}{23,85} \approx 9,118$$

$$g(w) \text{ nor min } \approx \frac{10}{23,85} \approx 0,402$$

valores que se asemejan a los teóricos

$$g(w) \text{ nor max } \Big|_{w=0} = \frac{1-2t_1 \cos w + t_1^2}{1-2f_1 \cos w + f_1^2} = \frac{1-2t_1 + t_1^2}{1-2f_1 + f_1^2} \approx 10,24$$

$$g(w) \text{ nor min } \Big|_{w_2} = \frac{1+2t_1 + t_1^2}{1+2f_1 + f_1^2} \approx 0,89$$

En este caso las estimaciones y, consiguientemente, el valor de las ordenadas máxima y mínima, son muy sensibles a las estimaciones de los parámetros, y para un mejor resultado habría que recurrir a una evaluación directa de los parámetros y no confiar exclusivamente como lo hacemos en este trabajo por falta de medios materiales a los gráficos de Stralkowski.

Las estimaciones de las varianzas de los parámetros vienen dadas, de acuerdo con 5.2.41) por:

$$\text{var } f_1 = \frac{(1-f_1 t_1)^2}{N(f_1 - t_1)^2} (1-f_1^2) \approx \frac{(1-0,95 \cdot 0,84)^2}{126(0,95-0,84)^2} (1-0,95^2) \approx 0,0026$$

$$\text{var } t_1 = \frac{(1-f_1 t_1)^2}{N(f_1 t_1)} (1-f_1 t_1) = \frac{(1-0,95 \cdot 0,84)^2}{126(0,95-0,84)^2} (1-0,95 \cdot 0,84) \approx 0,0054$$

por tanto,

$$\text{c.t. } f_1 \quad 0$$

por tanto,

$$\text{d.t. } f_1 \simeq 0,051 \quad \text{d.t. } t_1 \simeq 0,073$$

Por último, veamos si debemos incorporarle la tendencia determinista. De acuerdo con 4.5):

$$\text{e.t.} \simeq \left(\frac{c_0}{N} \left(1 + \frac{2r(1)}{r(1)-r(2)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \simeq \left(\frac{87,92}{126} \left(1 + \frac{2 \cdot 0,379^2}{0,379-0,46} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

valor numérico que no se puede calcular por resultado negativo. Por tanto recurrimos directamente a comparar la media 9,58 con el doble del error típico estimado, $2 \cdot 0,835 = 1,67$, y consiguientemente aceptamos su presencia.

Es decir, la oferta Monetaria queda representada por:

$$\begin{aligned} (1-0,95B) (\Delta M-9,58) &= (1-0,84B) a_t \\ (0,051) & \quad (0,073) \end{aligned}$$

6.7) Índice de producción industrial (IPI).

Los datos correspondientes a esta variable, están recogidos en el cuadro 6-15 y su correlograma en el cuadro 6-23.

Los estadísticos elementales correspondientes resultan ser:

I.P.I.-

Media	228,387
d.t.	72,839
e.t.	6,489
Máximo	416,900
Mínimo	121,400
Recorrido	295,500

Por consiguiente rechazamos esta variable como no estacionaria, y pasamos a calcular su primera diferencia, anotando los datos en el cuadro 6-16.

Los estadísticos elementales correspondientes a esta variable son los que a continuación resumimos:

 Δ I.P.I.-

Media	1,809
d.t.	13,146
e.t.	1,171
Máximo	93,100
Mínimo	80,600
Recorrido	173,700

pudiendo, pues, considerarse ya como estacionaria.

Identificación: Una vez más reproducimos para llevar a cabo la identificación comparada los seis primeros términos de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial estando los completos en los cuadros 6-24 y 6-25.

$\Delta I.P:I.-$

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	-0,553	-0,553
2	0,068	-0,343
3	0,155	0,026
4	-0,302	-0,395
5	0,278	-0,929
6	-0,137	0,085

Si calculamos sus correspondientes desviaciones típicas, suponiendo que los $r(k)$ se anulan a partir del primer término, tendremos:

$$\text{var } r(k) \simeq \frac{1}{126} (1 + 2 \cdot 0,553^2) \simeq 0,013$$

$$\text{var } f_{kk} \simeq \frac{1}{N} \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008$$

siendo sus respectivas desviaciones típicas:

$$\text{d.t. } r(k) \simeq 0,113$$

$$\text{d.t. } f_{kk} \simeq 0,09$$

y el doble de éstas:

$$2\text{d.t. } r(k) \simeq 0,226$$

$$2\text{d.t. } f_{kk} \simeq 0,178$$

con lo cual salvo algunos términos anómalos, puede considerarse que los $r(k)$ son nulos a partir del primer término. Lo mismo sucede para la mayoría de los correspondientes a la función de autocorrelación parcial.

Por tanto habría dudas acerca de si se trata

de una Media Móvil de primer término, una Representación Autorregresiva de segundo término, o bien una Mixta de orden (1,1) o mejor, quizás, una (2,1).

Si, en cambio, recurrimos a la comparación de espectros estando el de la variable representado en el gráfico 6-8 vemos, directamente, que debe tratarse de una Representación Autorregresiva de segundo orden.

La relación entre las estimaciones espectrales máxima y mínima es:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}} \approx \frac{167}{2,67} \approx 62,547$$

Si con las estimaciones de $r(1)$ y $r(2)$ recurrimos al gráfico 5-4, obtenemos: $f_1 \approx -0,81$ $f_2 \approx -0,45$. Con estos valores calculemos una estimación de la varianza residual para normalizar el espectro.

$$\sigma^2 = c_0(1 - f_1 r(1) - f_2 r(2)) = 172,817(1 - 0,81 \cdot 0,553 + 0,45 \cdot 0,068) \approx 101,063$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 32,169$$

por tanto, .

$$g(w) \text{ nor max} \approx \frac{167}{32,169} \approx 5,19$$

$$g(w) \text{ nor min} \approx \frac{2,67}{32,169} \approx 0,083$$

Si calculamos, a continuación, los valores teóricos tendremos:

$$g(w) \text{ nor} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w}$$

Y para obtener el máximo, puesto que en este caso no lo alcanzamos en los extremos, necesitamos calcular:

$$\cos w = \frac{f_1(f_2-1)}{4f_2} \approx -\frac{0,81 \cdot 1,45}{4 \cdot 0,45} \approx 0,652$$

por tanto $w = 2,28$ radianes, correspondiente a una os cilación de frecuencia 0,363.

Este último valor, concuerda muy satisfactoriamente con el obtenido a partir del espectro estimado y que se situa en torno a 2,5 radianes, con frecuencia igual a 0,39.

En estas condiciones las ordenadas espectrales teóricas serán:

$$g(w) \text{ nor max} =$$

$$= \frac{1}{1+0,81^2+0,45^2-2 \cdot 0,81(0,45-1)\cos 2,28+2 \cdot 0,45\cos 2,28} \approx 5,201$$

$$g(w) \text{ nor min} = \frac{1}{1+0,81^2+0,45^2-2 \cdot 0,81(-0,45-1)+2 \cdot 0,45} \approx 0,19$$

Admitiendo como adecuada esta identificación calculamos las desviaciones típicas asociadas a los pará metros.

De acuerdo con 5.2.3.1):

$$\text{var}(t_1) = \text{var}(t_2) \simeq \frac{1-t_2^2}{N} \simeq \frac{1-0,45^2}{126} \simeq 0,06$$

por tanto sus desviaciones típicas serán:

$$\text{d.t.}(t_1) = \text{d.t.}(t_2) \simeq 0,08$$

Por lo que respecta a la tendencia determinista tenemos según 4.5):

$$\text{e.t.} = \left(\frac{1+2r(1)+2r(2)}{N} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{172,81(1-2 \cdot 0,553+2 \cdot 0,068)}{126} \simeq 0,041$$

Y dado que la estimación de la media de la variable, ΔIPI , es igual a 1,89, admitimos la presencia de la tendencia determinista.

Por tanto:

$$(1+0,81B+0,45B^2)(\Delta \text{IPI}-1,89) = a_t$$

$$(0,08)(0,08)$$

6.8) Producción de acero (A).

A partir de los datos de esta variable resumidos en el cuadro 6-17 se han obtenido los estadísticos elementales siguientes:

A.-

Media	558,902
d.t.	239,939
e.t.	20,847
Máximo	1071,900
Mínimo	245,100
Recorrido	826,800

con lo cual vemos que no puede aceptarse como estacionaria, opinión que se refuerza si observamos el correlograma en el cuadro 6-23. Consecuentemente procedemos a calcular la primera diferencia de la variable, recogiendo sus valores en el cuadro 6-18 y a obtener sus estadísticos elementales.

$\Delta A.$ -

Media	5,611
d.t.	29,719
e.t.	2,617
Máximo	96,900
Mínimo	-127,300
Recorrido	224,200

Consiguientemente se la puede ya considerar como estacionaria.

Identificación: Una vez más para lograr su identificación procedemos a resumir los seis primeros valores de los coeficientes de autocorrelación y de autocorrelación parcial, recogidos en los cuadros 6-24 y 6-25 respectivamente.

$\Delta A.$ -

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	-0,258	-0,258
2	-0,082	0,166
3	0,025	0,051
4	-0,090	-0,058
5	-0,075	-0,055

Las varianzas correspondientes, suponiendo $r(k)=0$ para k superiores a la unidad, vienen dadas por:

$$\text{var } r(k) \approx \frac{1}{126} (1 + 2 \cdot 0,258^2) \approx 0,009$$

$$\text{var } f_{kk} \approx \frac{1}{126} \approx 0,008$$

y por tanto los límites correspondientes a dos veces su desviación típica serán:

$$2d.t. \ r(k) \approx 0,190$$

$$2d.t. \ f_{kk} \approx 0,178$$

Esto indica que sólo son significativamente diferentes de cero el primer término de cada una de las dos funciones, lo cual nos llevaría a identificar como Representaciones posibles tanto las de primer orden, Media Móvil y Autorregresiva, o bien una Mixta ARMA (1,1).

Si pasamos a examinar el espectro estimado, representado en el gráfico 6-4, observamos que es de variación relativamente suave puesto que la contribución a la varianza total por las distintas bandas de frecuencia es significativa y en ninguna de ellas, despreciable, siendo la relación entre sus ordenadas máxima y mínima:

$$\frac{g(w) \text{ max}}{g(w) \text{ min}} \approx \frac{560}{60} \approx 9,33$$

En nuestra opinión, y si bien es más complicado el análisis dada la relativa irregularidad del espectro, la Representación adecuada debe ser una AR(2) o bien una MV(1). Esta idea se refuerza si acudimos a

los gráficos 5-4 y 5-5, puesto que aparecen sólo como posibles las ya mencionadas.

En estas condiciones, supongamos que se trata, provisionalmente de una AR(2). Las estimaciones de los parámetros son: $f_1 \approx 0,25$; $f_2 \approx -0,1$.

La estimación de la varianza residual viene dada por:

$$\sigma^2 = c_0(1-f_1r(1)-f_2r(2)) = 883,22(1-0,25 \cdot 0,258-0,1 \cdot 0,088) \approx 819,25$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 260,78$$

por tanto,

$$g(w) \text{ nor max } \approx \frac{527}{260,78} \approx 2,021$$

$$g(w) \text{ nor min } \approx \frac{57}{260,78} \approx 0,22$$

Veamos ahora las características del espectro teórico.

El máximo sabemos que se alcanzará en:

$$w = \arccos \frac{f_1(f_2-1)}{4f_2} \approx \frac{-0,25(-0,1-1)}{-4 \cdot 0,09} \approx 2,43 \text{ radianes,}$$

mientras que el correspondiente al espectro estimado se alcanza en $w=2,356$ radianes.

Por, tanto existe concordancia por lo que a este aspecto se refiere.

Las ordenadas teóricas, máxima y mínima, serán:

$$g(w)_{\text{nor max}} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w} =$$

$$= \frac{1}{1+0,25^2+0,1^2-2\cdot 0,25(-0,1-1)\cos 2,43-2\cdot 0,1\cos 2\cdot 2,43} \approx$$

$$\approx 1,60$$

$$g(w)_{\text{nor min}} \approx \frac{1}{1+0,25^2+0,1^2+2\cdot 0,25(0,1+1)+2\cdot 0,1} \approx 0,557$$

ordenadas que se aproximan a las correspondientes del espectro estimado.

Si pasamos a la Representación en Media Móvil, para los valores de los coeficientes de autocorrelación de primer y segundo orden, tendremos:

$$t_1 \approx 0,3 \quad t_2 \approx 0,12$$

Consiguientemente:

$$\sigma^2 = \frac{c_0}{1+t_1^2+t_2^2} = \frac{883,22}{1+0,3^2+0,12^2} \approx 799,73$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 254,56$$

$$g(w)_{\text{nor max}} \approx \frac{527}{254,56} \approx 2,07$$

$$g(w)_{\text{nor min}} \approx \frac{57}{254,56} \approx 0,22$$

En este tipo de Representación también tenemos máximos intermedios.

$$g(w)_{\text{nor}} = 1 + t_1^2 + t_2^2 + 2t_1(t_2 - 1)\cos w - 2t_2\cos 2w$$

$$\frac{dg(w)}{dw} = 0 = -2t_1(t_2 - 1)\sin w + 4t_2\sin 2w$$

por tanto,

$$w = \arccos \frac{t_1(t_2 - 1)}{4t_2} = \arccos \frac{0,3(0,12 - 1)}{4 \cdot 0,12} \approx 2,15 \text{ rad.}$$

dianes, correspondiente a una oscilación de frecuencia 0,343, valor numérico algo más bajo que el real.

Las ordenadas máxima y mínima serán:

$$\begin{aligned} g(w)_{\text{nor max}} &= \\ &= 1 + 0,3^2 + 0,12^2 + 2 \cdot 0,3(0,12 - 1)\cos 2,15 - 2 \cdot 0,12\cos 2 \cdot 2,15 \approx \\ &\approx 1,30 \end{aligned}$$

$$g(w)_{\text{nor min}} \approx 1 + 0,3^2 + 0,12^2 + 2 \cdot 0,3(0,12 - 1) - 2 \cdot 0,12 \approx 0,34$$

siendo, por tanto, en este caso algo peores los resultados a los que hemos llegado.

Si queremos ver la relación entre las dos Representaciones, tendremos:

$$(1 - 0,3B - 0,12B^2) = (1 - 0,527B)(1 - 0,227B)$$

por tanto,

$$x(t) = (1 - 0,3B - 0,12B^2) a_t$$

se transforma en:

$$1 + (0,527 - 0,227)B + (0,527^2 + 0,227^2 - 0,527 \cdot 0,227)B^2 + \\ + (0,527^3 - 0,227^3 - 0,527^2 \cdot 0,227 + 0,527 \cdot 0,227^2)B^3 + \dots \\ \dots) x(t) = a_t$$

$$(1 + 0,3B + 0,20B^2 + 0,09B^3 + \dots) x(t) \simeq a_t$$

con lo cual comprobamos que existe diferencia entre la AR(2) y MV(2), resultado que cabía esperar dado los cálculos anteriores.

Una vez identificada la Representación procedemos a la estimación de las varianzas de los parámetros calculados y a analizar si debe introducirse una tendencia de tipo determinista en la Representación.

De acuerdo con 5.2.1.1):

$$\text{var } f_1 = \text{var } f_2 = \frac{1 - r(1)f_1 - r(2)f_2}{N 1 - r(1)^2} =$$

$$= \frac{1 - 0,258 \cdot 0,25 - 0,088 \cdot 0,1}{126(1 - 0,258^2)} \simeq 0,0079$$

$$\text{d.t. } f_1 = \text{d.t. } f_2 \simeq 0,09$$

y según 4.5):

$$\text{e.t.} = \left(\frac{c_0(1 + R(1))(1 - 2R(1) + R(2))}{N(1 - R(1))(1 - R(2))} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{883(1 - 0,258)(1 + 2 \cdot 0,258 - 0,088)}{126(1 + 0,258)(1 + 0,088)} \simeq 2,33$$

que comparada con la media estimada, 5,61, nos sugiere la conveniencia de incorporar la tendencia.

Por consiguiente:

$$(1+0,25B+0,1B^2)(\Delta A-5,61) = a_t \\ (0,09) (0,09)$$

6.9) Demanda de Energía Eléctrica (EE).

Los datos de esta variable se resumen en el cuadro 6-19, su correlograma en el cuadro 6-23 y sus estadísticos elementales son los siguientes:

EE.-

Media	4043,869
d.t.	1313,794
e.t.	116,580
Máximo	6671,699
Mínimo	2093,300
Recorrido	4578,398

Por tanto, no podemos considerarla como estacionaria y pasamos a calcular su primera diferencia, así como también, sus estadísticos elementales. Los datos correspondientes se encuentran en el cuadro 6-20.

Δ EE.-

Media	31,975
d.t.	111,023
e.t.	9,89
Máximo	362,098
Mínimo	-183,398
Recorrido	545,496

Por consiguiente, esta nueva variable, EE, se nos presenta como más adecuada que la anterior para llevar a cabo nuestro análisis.

Identificación: Reproducimos, a continuación, los seis primeros términos de la función de autocorrelación y de autocorrelación parcial, obtenidos de los cuadros 6-24 y 6-25.

$\Delta EE.-$

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	-0,366	-0,366
2	-0,178	-0,360
3	0,188	-0,043
4	-0,164	-0,201
5	-0,049	-0,205
6	0,170	0,126

Las varianzas, suponiendo que la función de autocorrelación se anula a partir del segundo término, serán:

$$\text{var } r(k) \simeq \frac{1}{126} (1 + 2 \cdot 0,366^2) \simeq 0,01$$

$$\text{var } f_{kk} \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008$$

y por consiguiente,

$$\text{d.t. } r(k) \simeq 0,1$$

$$\text{d.t. } f_{kk} \simeq 0,089$$

con lo cual el doble de estas desviaciones típicas son 0,2 y 0,178 respectivamente.

Con estas estimaciones observamos la existencia de valores superiores en ambas funciones, y por tanto es difícil admitir que se anulen a partir de un número reducido de retardos.

En todo caso si admitieramos que los coeficientes de autocorrelación son nulos, a partir del segundo término podríamos, identificar como plausible una Media Móvil de primer orden. Por otra parte si no admitimos la hipótesis anterior habría que aventurar una Representación Mixta (1,1).

El estimado correspondiente a esta variable está representado en el gráfico 6-10 y en él observamos un pico bastante pronunciado en las proximidades de 2,161 radianes correspondiente a una oscilación de período 2,907 meses, es decir, muy próxima a la frecuencia estacional de 2,094 radianes, de período tres meses.

Dada la forma del espectro y la relación entre ordenada máxima y mínima:

$$\frac{g(w) \text{ nor max}}{g(w) \text{ nor min}} \simeq \frac{11470}{481} \simeq 23,84$$

lo identificamos provisionalmente como el correspondiente a una Representación Autorregresiva de segundo orden.

Los parámetros correspondientes serán:

$$f_1 \simeq -0,48 \quad f_2 \simeq -0,33$$

La estimación de la varianza residual vendrá dada por:

$$\sigma^2 = c_0(1-f_1r(1)-f_2r(2)) = 12325,04(1-0,48 \cdot 0,366 - 0,33 \cdot 0,178) \simeq 9391,92$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \simeq 2989,54$$

Las ordenadas estimadas normalizadas son:

$$g(w) \text{ nor max} \simeq \frac{11470}{2989,54} \simeq 3,837$$

$$g(w) \text{ nor min} \simeq \frac{481}{2989,54} \simeq 0,161$$

Analicemos ahora si el espectro teórico reproduce estas características.

En primer lugar el máximo se situa en:

$$w = \arccos \frac{f_1(f_2-1)}{4f_2} = \arccos \frac{-0,48(-0,33-1)}{-4 \cdot 0,33} \simeq 2,076 \text{ rad.}$$

Consiguientemente cumple satisfactoriamente esta característica. Veamos ahora lo que sucede con las ordenadas máxima y mínima.

$$\begin{aligned} g(w) \text{ nor max} &= \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w} = \\ &= \frac{1}{1+0,48^2+0,33^2-2 \cdot 0,48(-0,33-1)\cos 2,076-2 \cdot 0,33\cos 2 \cdot 2,076} \simeq \\ &\simeq 2,67 \end{aligned}$$

$$g(w)_{\text{nor}} \cdot \min \approx \frac{1}{1+0,48^2+0,33^2-2 \cdot 0,48(-0,33-1)+2 \cdot 0,33} \approx$$

$$\approx 0,30$$

valores que se aproximan a los estimados y por tanto, consideramos esta identificación realizada como satisfactoria.

No obstante para asegurarnos que no se trata de ninguna $MV(2)$ y $ARMA(1,1)$ podemos recurrir a los gráficos para buscar, a partir de los coeficientes de autocorrelación de primer y segundo orden, las estimaciones de los parámetros correspondientes. Si llevamos a cabo este deseo, veremos que no es posible encontrar los parámetros correspondientes a la $MV(2)$ y por otra parte el $ARMA(1,1)$ da valores que se aproximan a los de una $MV(1)$, cuya forma espectral no es adecuada. De este análisis anterior sale reforzada la identificación realizada.

Por consiguiente la primera diferencia de la variable demanda de Energía Eléctrica se comporta como una Representación Autorregresiva de segundo orden.

Calculemos, a continuación, la estimación de la varianza de los parámetros, que según 5.2.1.1) nos da:

$$\begin{aligned} \text{var } f_1 &= \text{var } f_2 = \frac{1-r(1)f_1-r(2)f_2}{N \cdot 1-r(1)^2} = \\ &= \frac{1-0,366 \cdot 0,48-0,178 \cdot 0,33}{126(1-r(1)^2)} \approx 0,007 \end{aligned}$$

$$d.t. f_1 = d.t. f_2 \simeq 0,084$$

Por último de acuerdo con 4.5):

$$e.t. = \left(\frac{c_o \frac{1+r(1)}{N} \frac{1-2r(1)+r(2)}{1-r(1)} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{12325,04(1-0,366)(1+2 \cdot 0,366-0,178)}{126(1+0,366)(1+0,178)} \simeq 7,74$$

y dado que la media estimada de la primera diferencia de la demanda de Energía Eléctrica, ΔEE , es aproximadamente 31,79 admitimos la presencia de la tendencia determinista.

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1+0,48B+0,33B^2 \\ (0,084) (0,084) \end{pmatrix} (\Delta EE - 31,97) = a_t$$

6.10) Consumo de cemento artificial (CA).

Esta es la última variable que vamos a estudiar. Sus datos están recogidos en el cuadro 6-21 y el correlograma en el cuadro 6-23, siendo sus estadísticos elementales los siguientes:

C.A.-

Media	1337,342
d.t.	379,355
e.t.	33,62
Máximo	2153,400
Mínimo	687,200
Recorrido	1466,200

La variable CA, por tanto, no puede ser considerada como estacionaria y por eso recurrimos a calcular su primera diferencia, que aparece en el cuadro 6-22, a partir de las cuales se obtienen sus estadísticos elementales.

$\Delta C.A.-$

Media	10,404
d.t.	87,221
e.t.	7,77
Máximo	363,400
Mínimo	-336,300
Recorrido	699,700

Por tanto, vemos que esta nueva variable puede considerarse como apta para nuestro análisis.

Identificación: Resumimos, a continuación, los seis primeros términos de las estimaciones de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, a partir de los cuadros 6-24 y 6-25.

$\Delta C.A.-$

<u>k</u>	<u>r(k)</u>	<u>f_{kk}</u>
1	-0,457	-0,457
2	-0,018	-0,287
3	-0,022	-0,226
4	0,038	-0,127
5	0,071	0,034
6	-0,085	-0,018

Las varianzas de las anteriores estimaciones serán:

$$\text{var}[r(k)] \simeq \frac{1}{126} (1 + 2 \cdot 0,457^2) \simeq 0,011$$

$$\text{var}[f_{kk}] \simeq \frac{1}{126} \simeq 0,008$$

y sus desviaciones típicas:

$$\text{d.t.}[r(k)] \simeq 0,106$$

$$\text{d.t.}[f_{kk}] \simeq 0,089$$

Por tanto, parece evidente, de acuerdo con el primer criterio de identificación, que se trata de una Representación en Media Móvil de primer orden, o quizás una Mixta de orden (3,1).

Con el segundo procedimiento de identificación observamos, en el gráfico 6-44 una evolución relativamente suave del espectro, indicativo de una Representación en Media Móvil, aunque también puede asimilarse a una Autorregresiva de segundo orden con parámetros próximos a $f_1 \simeq -0,4$ y $f_2 \simeq -0,2$, la cual, además, nos serviría para tomar en consideración el máximo que se apunta en el espectro estimado.

Analicemos, en primer lugar, la Representación en Media Móvil.

De acuerdo con $r(1) = -0,457$, $r(2) = 0,018$ y mediante el gráfico 5-5, obtenemos: $t_1 \simeq 0,65$ y $t_2 \simeq 0,0$ que al ser una MV(1) no puede reproducir el máximo.

La estimación de la varianza residual será:

$$\sigma^2 = \frac{c_0}{1+t_1^2} \approx \frac{7607,50}{1+0,65^2} \approx 5347,98$$

$$\frac{\sigma^2}{n} \approx 1702,3$$

por tanto,

$$g(w) \text{ nor max} \approx \frac{5526}{1702,3} \approx 3,25$$

$$g(w) \text{ nor min} \approx \frac{137}{1702,3} \approx 0,08$$

mientras que las ordenadas teóricas correspondientes son:

$$g(w) \text{ nor max} \approx 1 - 2t_1 \cos w + t_1^2 = 1 + 2t_1 + t_1^2 \approx 2,72$$

$$g(w) \text{ nor min} \approx 1 - 2t_1 + t_1^2 \approx 0,12$$

valores que se aproximan a los estimados.

Si por el contrario suponemos que se trata de una forma Autorregresiva de segundo orden, a través del gráfico 5-4 obtenemos: $f_1 \approx -0,62$; $f_2 \approx -0,28$ y a partir de éstos podemos estimar la varianza residual:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= c_0(1 - f_1 r(1) - f_2 r(2)) = 7607,5(1 - 0,62 \cdot 0,457 - 0,28 \cdot 0,018) = \\ &= 5413,65. \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma^2}{\pi} \approx 1723,22$$

$$g(w) \text{ nor max } \approx \frac{5526}{1723,22} \approx 3,21$$

$$g(w) \text{ nor min } \approx \frac{137}{1723,22} \approx 0,10$$

Las características del espectro teórico son las siguientes:

Máximo

$$w = \arccos \frac{f_1(f_2-1)}{2f_2} = \arccos \frac{-0,62(-0,28-1)}{-4,0,28} \approx$$

$$\approx 2,36 \text{ radianes}$$

correspondiente a un período de 2,66 meses, mientras que el estimado se sitúa en torno a 2,75 radianes siendo el período correspondiente 2,28 meses, con lo que existe similaridad.

Por lo que respecta a las ordenadas máxima y mínima, éstas son:

$$g(w) \text{ nor max} = \frac{1}{1+f_1^2+f_2^2+2f_1(f_2-1)\cos w-2f_2\cos 2w} =$$

$$= \frac{1}{1+0,62^2+0,28^2-2,0,62(-0,28-1)\cos 2,36+2,0,28\cos 2,2,36}$$

$$\approx 2,94$$

$$g(w) \text{ nor min} \approx \frac{1}{1+0,62^2+0,28^2+2,0,62(0,28+1)2,0,28} \approx 0,28$$

que son próximos a los estimados.

Para la variable que estimamos, las dos Representaciones que utilizamos no se aproximan la una a la otra puesto que si aplicamos la propiedad de inversión a la Media Móvil se tiene:

$$x(t) = (1-0,65B) a_t$$

$$(1-0,62B)^{-1}x(t) = a_t$$

$$(1+0,65B+0,65B^2+0,65B^3+\dots) x(t)=a_t$$

$$(1+0,65B+0,42B^2+0,27B^3+0,18B^4+\dots)x(t)=a_t$$

no pudiéndose pues, aproximarse a una Representación Autorregresiva de segundo orden.

En este caso concreto, hemos identificado dos Representaciones que no son compatibles entre sí.

Si admitimos el pico como significativo, entonces seleccionaríamos la Autorregresiva y, en caso contrario, la Media Móvil.

Dada esta situación sería conveniente para resolverla recurrir a otros criterios como seleccionar la que minimizase el error de previsión, la que mejor indique los cambios de coyuntura o cualquier otro criterio "ad hoc".

Nosotros para proseguir supondremos que se trata de una Representación Autorregresiva.

Por tanto, la estimación de la varianza de los parámetros vendrá dada por:

$$\text{var } f'_1 = \text{var } f_2 = \frac{1-r(1)f_1-r(2)f_2}{N 1-r(1)^2} =$$

$$= \frac{1-0,457 \cdot 0,62-0,018 \cdot 0,28}{126(1-0,457^2)} \simeq 0,007$$

$$\text{d.t. } f_1 = \text{d.t. } f_2 \simeq 0,084$$

y la estimación del error típico será:

$$\text{e.t.} = \left(\frac{c_0(1+r(1))(1-2r(1)+r(2))}{N(1-r(1))(1-r(2))} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{7607,5(1-0,457)(1+2 \cdot 0,457-0,018)}{126(1+0,457)(1+0,018)} \simeq 6,474$$

y dado que el valor de la media es 10.404, rechazamos la presencia de la tendencia determinista.

Por consiguiente:

$$(1+0,62B+0,28B^2) \Delta CA = a_t$$

$$(0,084)(0,084)$$

P R E V I S I O N E S

Para mostrar que el procedimiento de identificación que hemos seguido cumple el propósito de seleccionar una Representación que reproduzca las características de la serie ajustada, vamos a llevar a cabo previsiones para dos años diferentes, 1970 y 1974.

Hemos seleccionado estos dos años, para ver el comportamiento predictivo en un año intermedio y otro final.

Indice general de precios al por mayor (IPM)

De acuerdo con la identificación realizada tenemos:

$$(1-0,88B) \text{ IPM}_t \quad (1-0,7B) a_t$$

que puede escribirse como:

$$\text{IPM}_t = 1,88\text{IPM}_{t-1} - 0,88\text{IPM}_{t-2} + a_t - 0,7 a_{t-1}$$

que presenta una forma adecuada para efectuar las previsiones:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) IPM ₇₀	201,6	200,9	201,7	205,1	201,8	202,8	204,0	206,3	205,2	207,2	207,1	207,2
(2) Previsión ₇₀			200,3	199,7	199,3	198,9	198,5	198,1	197,7	197,4	197,1	196,8
(3) $\frac{\% \text{ error}}{(1)}$			-0,7	-2,7	-1,25	-1,96	-2,77	-4,14	-3,79	-4,96	-5,07	-5,28
(1') IPM ₇₄	275,5	284,9	288,2	289,7	295,3	298,1	300,6	306,1	309,0	321,7	319,4	324
(2') Previsión ₇₄			292,3	298,8	304,5	309,5	314,0	317,9	321,4	324,4	327,1	329,5
(3') $\frac{\% \text{ error}}{(1')}$			1,42	3,14	3,12	3,82	4,46	3,81	4,01	3,74	2,41	1,7

Debe observarse, lo cual sucederá en todas las previsiones que efectuemos que dada la correlación existente entre las previsiones éstas tienen tendencia a situarse sistemáticamente bien por encima o por debajo de los verdaderos valores de la variable.

Por otra parte, conviene destacar que para ninguna variable llevaremos a cabo el proceso de adaptación consistente en incorporar las nuevas observaciones, dado que precisa de calculos laboriosos ~~(11)~~ y la mejora que supone para las previsiones no compensa, en nuestra opinión, el esfuerzo.

Índice de precios al por mayor de Alimentos, Bebidas y Tabacos (IPAT).

En este caso la identificación realizada corresponde a una Representación ARMA(0,0), es decir, ruido blanco. Concretamente:

$$\Delta IPAT_t = 1,54 \approx a_t$$

o lo que es lo mismo:

$$IPAT_t \approx IPAT_{t-1} + 1,54 + a_t$$

Veamos, a continuación, como se comporta predictivamente.

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) IPAT ₇₀	226,5	225,1	225,7	231,1	224,3	225,8	227,5	231,6	229,1	232,8	232,3	232
(2) Previsión ₇₀	228,0	229,6	228,2	229,7	231,3	232,8	234,3	235,9	237,4	239	240,5	
(3) $\frac{\% \text{ error}}{(1)}$			1,29	1,73	-1,27	2,41	2,44	2,33	1,17	2,97	1,98	2,88
(1') IPAT ₇₄	312,7	319,7	320,7	320,3	324,6	326,2	326,1	330,5	334,6	341,1	354,9	362,6
(2') Previsión ₇₄	314,2	315,8	317,3	318,9	320,4	321,9	323,5	325	326,6	328,1	329,6	
(3') $\frac{\% \text{ error}}{(1')}$	-1,75	-1,55	-0,93	-1,79	-1,81	-1,30	-2,16	-2,95	-4,44	-8,17	-10,01	

En estas previsiones observamos tres valores, correspondientes al año 1974, especialmente desajustadas. La anomalía se debe a la aceleración del proceso inflacionista en los últimos meses del año.

Indices de precios al por mayor de productos agrícolas (IPPA).

Esta variable se comporta en forma similar a la anterior, por tanto:

$$\Delta \text{IPPA}_t - 1,313 \triangleq a_t$$

y desarrollando:

$$\text{IPPA}_t \simeq \text{IPPA}_{t-1} + 1,313 + a_t$$

Las previsiones son las siguientes:

	E	F	M	A	M	J	Jl	A	S	O	N	D
(1) IPPA ₇₀	219,5	220,8	220,6	229,7	219,4	217,9	224,5	228,9	224,9	228,9	228,6	227,9
(2) Previsión ₇₀		220,8	222,1	223,4	224,8	226,1	227,4	228,7	230,0	231,3	232,6	233,9
(3) $\frac{\% \text{ error}}{(1)}$		0,0	0,68	-2,82	2,46	3,76	1,29	-0,09	2,27	1,05	1,75	2,63
(1') IPPA ₇₄	801,3	305,7	304,1	298,9	303,9	308,7	307,3	313,5	317,5	323,0	330,1	332,2
(2') Previsión ₇₄		302,6	303,9	305,2	306,6	307,9	309,2	310,5	311,8	313,1	314,4	315,7
(3') $\frac{\% \text{ error}}{(1')}$		-1,02	-0,07	2,11	0,89	-0,26	0,62	-0,97	-1,83	-3,16	-4,99	-5,23

observándose, también, el comportamiento algo peor en las últimas previsiones del año 1974.

Indice de precios al por mayor de productos agrícolas industrializados (IPAT).

Para esta variable suponemos que la Representación aceptable viene dada por:

$$(1-0,142B-0,19B^2)(\Delta IPAT_{t-1,4}) \simeq a_t$$

y desarrollando se tiene:

$$IPAT_t \simeq 1,142IPAT_{t-1} + 0,048IPAT_{t-2} - 0,19IPAT_{t-3} + 0,935 + a_t$$

por consiguiente:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1)IPAT ₇₀	202,2	201,8	201,6	201,7	201,3	202,0	203,1	202,7	202,6	203,9	204,6	205,8
(2)Previsión ₇₀				202,4	203,4	204,7	206,0	207,4	208,7	210,1	211,5	212,9
(3)% $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				0,35	1,04	1,34	1,43	2,32	3,01	3,04	3,37	3,45
(1')Previsión ₇₄	276,6	285,2	292,4	293,8	292,9	290,1	287,9	290,4	299,3	300,9	337,4	343,5
(2')% $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				296,0	298,8	300,8	302,6	304,1	305,6	307,1	308,5	309,9
(3')% $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				0,78	2,01	3,69	5,11	4,72	2,10	2,06	-9,37	-10,8

Repitiéndose, aquí también, las previsiones no adecuadas para los últimos meses del año 1974.

Indice general del coste de la vida (ICV).

De acuerdo con la identificación que hemos llevado a cabo se tiene:

$$(1-0,28B-0,36B^2)(\Delta ICV_{t-0,831}) \simeq a_t$$

que es equivalente a:

$$ICV_t \approx 1,28ICV_{t-1} + 0,08ICV_{t-2} - 0,36ICV_{t-3} + 0,3 + a_t$$

por tanto:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1)ICV ₇₀	104,6	104,9	105,7	106,3	105,6	106,8	108,5	109,7	110,2	111,3	111,6	111,4
(2)Previsión ₇₀				106,3	107,1	107,8	108,6	109,4	110,2	111,1	111,9	112,7
(3) $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				0	1,42	0,94	0,09	-0,27	0	-0,01	0,27	1,17
(1')ICV ₇₄	151,3	153,7	155,1	158,5	160,5	161,2	263,1	165,8	168,4	169,4	174,9	177,3
(2')Previsión ₇₄				156,7	157,9	159,1	160,2	161,2	162,2	163,1	164,0	164,9
(3') $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				-1,15	-1,65	-1,32	-1,81	-2,85	-3,82	-3,86	-6,65	-7,52

En este caso los errores son muy reducidos, con la excepción de las últimas previsiones del año 1974.

Indice coste de la vida: Alimentación (ICVA).

Esta variable sigue la Representación:

$$(1-0,1B-0,27B^2)(ICVA_t-0,809) \approx a_t$$

que puede escribirse como:

$$ICVA_t \approx 1,1ICVA_{t-1} + 0,17ICVA_{t-2} - 0,27ICVA_{t-3} + 0,51 + a_t$$

por consiguiente:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1)ICVA ₇₀	104,4	103,2	104,3	103,2	102,8	104,4	105,6	106,6	108,5	108,1	107,8	107,8
(2)Previsión ₇₀				104,6	105,4	106,1	106,9	107,7	108,6	109,3	110,1	110,9
(3) $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				1,36	2,53	1,63	1,23	-0,84	0	1,11	2,13	2,88
(1')ICVA ₇₄	150,0	151,3	150,0	154,9	156,6	158,7	159,0	163,3	163,7	165,7	172,8	174,4
(2')Previsión ₇₄				150,7	151,0	151,7	152,3	153,1	153,7	154,5	155,2	156,0
(3') $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				-2,79	-3,71	-4,61	-4,40	-6,66	-6,51	-7,25	-11,3	-11,79

Vemos, por tanto, que las previsiones para el año 1974 son bastante inexactas como consecuencia que las tres primeras observaciones que hemos empleado para iniciar el proceso, eran, en valor, muy similares teniendo comportamiento completamente diferente al resto de las observaciones.

Oferta Monetaria (M).

La Representación identificada viene dada por:

$$(1-0,95B)(\Delta M_t - 1,58) \sim (1-0,84B)a_t$$

es decir:

$$M_t \sim 1,95M_{t-1} - 0,95M_{t-2} + 0,48 + a_t - 0,84a_{t-1}$$

La tabla correspondiente será:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) M_{70}	658,6	666,2	661,4	654,0	653,3	656,5	663,8	666,6	672,8	679,0	680,4	687,3
(2) Previsión $_{70}$			673,9	681,7	689,6	697,7	705,9	714,1	722,4	730,8	739,3	747,9
(3) $\% = \frac{(2)-(1)}{(1)}$			1,89	4,24	5,56	6,28	6,34	7,13	7,37	7,63	8,66	8,82
(1') M_{74}												
(2') Previsión $_{74}$												
(3') $\% = \frac{(2')-(1')}{(1')}$												
			-0,94	-2,34	-1,64	-1,79	-1,99	-0,78	-0,6	-2,56	-1,97	

En este caso las peores previsiones corresponden al año 1970, como consecuencia de la disminución del valor numérico de las observaciones a partir de la segunda, no alcanzándose hasta la octava (mes de Agosto) el nivel del precio.

Por otra parte el hecho de que las previsiones para el año 1974 no estén afectadas como las varia-

bles relacionadas con los precios al por mayor y al por menor que acabamos de examinar puede ser consecuencia del diferente comportamiento en el tiempo de estas variables.

Indice de producción industrial (IPI).

De acuerdo con la identificación de esta variable tenemos:

$$(1+0,81B+0,45B^2)(IPT_t-1,89) \simeq a_t$$

y desarrollando:

$$IPT_t \simeq 0,19I_{t-1}+0,36I_{t-2}+0,45I_{t-3}+4,27+a_t$$

por tanto:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) IPI ₇₀	234,5	237,9	234,4	251,9	240,9	246,6	243,5	183,8	242,2	249,7	249,8	239,3
(2) Provisión ₇₀				240,0	241,3	242,0	245,1	246,9	248,3	250,6	252,4	254,2
(3) %error = $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				-4,96	0,17	-1,9	0,66	34,33	2,94	0,36	1,04	6,28
(1) IPI ₇₄	371,1	359,7	381,0	372	380,1	382	354,2	381,4	350,7	374,9		
(2) Provisión ₇₄				373,1	374,2	381,1	379,2	381,9	384,8	385,5		
(3) %error = $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				0,3	-1,58	-0,24	7,06	0,13	9,72	2,83		

En este caso las previsiones son muy buenas si exceptuamos un valor, anómalo, para Agosto de 1970 y Septiembre de 1974.

Producción de acero (A).

Esta variable sigue también una Representación Autorregresiva de segundo orden, concretamente:

$$(1+0,25B+0,1B^2)(A_t-5,61) \approx a_t$$

que puede tambien escribirse como:

$$A_t = 0,75A_{t-1} + 0,15A_{t-2} + 0,1A_{t-3} + 7,57 + a_t$$

por tanto:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) A_{70}	581,1	591,3	598,7	602,5	624,3	641,7	611,0	608,7	608,1	608,0	669,9	639,2
(2) Previsión $_{70}$				603,4	609,1	614,7	620,3	625,9	631,5	637,1	642,7	648,3
(3) $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				0,15	-2,50	-4,39	1,52	2,83	3,85	4,79	-3,3	1,42
(1') A_{74}	868,6	910,6	957,6	892,2	964,8	958	960,3	978,0	1026	1031,5	979,7	
(2') Previsión $_{74}$				949,9	954,2	961,3	966,6	972,2	977,2	983,4	989,0	
(3') $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				6,39	-1,11	0,34	0,66	-0,6	-4,93	-4,89	0,95	

siendo los errores de previsión muy reducidos.

Demanda de Energía Eléctrica (EE).

La Representación correspondiente viene dada por:

$$(1+0,48B+0,33B^2)(EE_t-31,97) \approx a_t$$

o bien:

$$EE_t = 0,52EE_{t-1} + 0,15EE_{t-2} + 0,33EE_{t-3} + 57,87 + a_t$$

De acuerdo con ello la tabla de previsión será:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) EE_{70}	4064,9	4066,1	4077,2	4221,1	4118,5	4269,9	4279,1	4308,3	4461,2	4473,4	4343,9	4513,1
(2) Previsión $_{70}$				4129,3	4158,5	4185,2	4220,6	4252,7	4283,5	4316,0	4348,1	4374,8
(3) $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				-3,92	0,97	-2,02	-1,86	-1,31	-4,15	-3,65	0,10	-3,04
(1') EE_{74}	6162,6	6306,2	6192,9	6027,2	6142,1	5971,2	6137,8	6192,4	6350,4	6646,3	6452,7	6179,9
(2') Previsión $_{74}$				6257,8	6321,9	6327,6	6361,6	6401,3	6428,9	6460,4	6494,1	6525,4
(3') $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				3,83	2,91	5,96	3,65	3,38	1,23	-2,88	0,65	5,60

Ventas de cemento artificial (CA).

Esta variable tiene un comportamiento muy similar a las anteriores, puesto que sigue una Representación Autorregresiva de segundo orden:

$$(1+0,62B+0,28B^2) CA_t \simeq a_t$$

que puede escribirse como:

$$CA_t \simeq 0,38CA_{t-1} + 0,34CA_{t-2} + 0,28CA_{t-3} + a_t$$

por tanto:

	E	F	M	A	M	J	JL	A	S	O	N	D
(1) CA_{70}	1346,1	1395,2	1332,4	1603,5	1315,6	1368,6	1380,8	1301,7	1379,4	1379,5	1405,6	1376,2
(2) Previsión ₇₀				1357,6	1359,6	1351,3	1355,9	1355,4	1354,4	1355,2	1355,0	1354,9
(3) $\frac{(2)-(1)}{(1)}$				-18,13	3,35	-2,26	-1,85	4,15	-1,85	-1,77	-3,69	-1,62
(1') CA_{74}	2165,3	1878,8	1924,7	2022,6	2098,7	1884,7	1945,6	1982,3	1943,9	2057,1	1977,2	
(2') Previsión ₇₄				1976,5	1931,5	1944,9	1949,2	1942,8	1945,6	1945,7	1944,8	
(3') $\frac{(2')-(1')}{(1')}$				-2,33	-8,65	3,18	0,21	-2,06	0,11	-5,76	-1,70	

dando, por tanto, unos resultados predictivos muy razonables, reforzándose la idea de que la Representación seleccionada es aceptable.

CONCLUSIONES

1) El método de identificación propuesto consistente en la comparación del espectro estimado con los teóricos correspondientes a las Representaciones tipo, es operativo al seleccionar, con facilidad, la Representación adecuada.

2) La no perfecta estacionariedad de las series no impide el proceso de identificación.

A pesar de que esperábamos que los datos utilizados estuvieran afectados por el distinto grado de inflación anterior y posterior a 1972, ello no ha obstaculizado el proceso.

No obstante, se observa una tendencia a errores predictivos crecientes para las últimas observaciones disponibles.

El hecho sirve, además, para ilustrar el valor predictivo, a corto plazo, que se consigue con estas representaciones.

3) Los indicadores y variables con las que hemos trabajado, una vez eliminada su tendencia y estacionalidad, se ajustan a las siguientes Representaciones:

a) simples de primer orden

- Autorregresiva: AR(1)

- Média Móvil: MV(1)

b) simples de segundo orden

- Autorregresiva: AR(2)

- Media Móvil: MV(1)

c) mixtas de primer orden

- Autorregresiva-Media Móvil ARMA(1,1)

- 4) Los índices de precios al por mayor de Alimentos, Bebidas y Tabacos (IPAT) y de productos agrícolas industrializados (IPAI), responden a una Representación cuya primera diferencia puede considerarse puramente aleatoria.

Estos resultados son similares a los obtenidos por Granger y Morgenstern en sus dos artículos "Spectral analysis of stock market prices" y "The Random-walk Hypothesis of stock Market Behavior" aparecidas en Kyklos, en 1963 y 1964, pag. 1-27 y 1-30 respectivamente.

- 5) El índice de precios al por mayor y la oferta monetaria tienen Representaciones idénticas con valores numéricos de los parámetros muy próximos.

Las restantes variables indicativas de precios, IPAI, ICVA y ICV se agrupan en forma similar. Por último las variables reales, IPI, EE, A y CA tienen también una estructura común.

- 6) A pesar de no disponer de un programa de ordenador que nos proporcionara estimaciones finales para los parámetros autorregresivos y de media móvil, se han podido obtener los valores numéricos de los mismos a través de los gráficos proporcionados por Stralkowski.
- 7) La desestacionalización de los indicadores de coyuntura, llevada a cabo por el Instituto Nacional de Estadística, es correcta en el sentido de eliminar los picos espectrales asociados a las frecuencias estacionales.
- 8) Se ha propuesto un método de determinación de la función de transferencia de los filtros que, sirve para evaluar los distintos métodos de desestacionalización existentes, y que consiste en compa-

rar el espectro de una serie aleatoria convenientemente seleccionado para que tenga el espectro plano, con el de la misma serie aleatoria una vez filtrada.

Este procedimiento no hemos podido hacerlo operativo por falta de facilidades relativas a tiempo de ordenador y perforación de datos.

A P E N D I C E N º 1

T r a n s f o r m a d a s i n t e g r a l e s

Si $f(x)$ es una función que reúne las condiciones de integrabilidad necesarias se dice que $g(y)$ es la transformada integral núcleo $k(k,y)$ si se verifica:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(k,y) f(x) dx$$

Las transformadas más importantes son las que vienen definidas por los siguientes núcleos:

a) Transformada exponencial de Fourier

$$k(x,y) = e^{-jxy} \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

en este caso

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jxy} f(x) dx$$

b) Transformada coseno de Fourier

$$\begin{aligned} k(x,y) &= \cos xy & x \geq 0 \\ k(x,y) &= 0 & x < 0 \end{aligned} \longrightarrow g(y) = \int_0^{+\infty} \cos xy f(x) dx$$

c) Transformada seno de Fourier

$$\begin{aligned} k(x,y) &= \sin xy & x \geq 0 \\ k(x,y) &= 0 & x < 0 \end{aligned} \longrightarrow g(y) = \int_0^{+\infty} \sin xy f(x) dx$$

d) Transformada de Laplace

$$\begin{aligned} k(x,y) &= e^{-xy} & x \geq 0 \\ k(x,y) &= 0 & x < 0 \end{aligned} \longrightarrow g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} f(x) dx$$

e) Transformada de Mellin

$$\begin{aligned} k(x,y) &= x^{y-1} & x \geq 0 \\ k(x,y) &= 0 & x < 0 \end{aligned} \longrightarrow g(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} f(x) dx$$

En particular puede observarse que las transformadas seno y coseno de Fourier son casos particulares de la transformada exponencial de Fourier y asimismo sucede con la transformada de Laplace.

A nuestros efectos nos interesan en forma particular las tres primeras transformadas, es decir las otras transformadas de Fourier.

Recordemos que el espectro de $x(t)$ tiene la siguiente expresión:

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt$$

y es, por tanto, la transformada exponencial de Fourier del proceso $x(t)$.

$$\text{Por otra parte } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ que}$$

es también otra transformada de Fourier de $s(\omega)$ y que se denomina fórmula de inversión de la transformada de Fourier.

Si como $x(t)$ es la función de autocovarianza, $AUCOV(K)$, el espectro $g(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función de autocovarianza.

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega k} AUCOV(K) dk$$

A partir de la fórmula de inversión de Fourier se deduce:

$$AUCOV(K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega k} g(\omega) d\omega.$$

A P E N D I C E N.º 2

Interpretación de las Representaciones Identificadas

El estudio de las series temporales, a través de las Representaciones que hemos utilizado permite analizarlas fácilmente dada la simplicidad de sus métodos de cálculo y obtención de previsiones. Sin embargo debe tenerse en cuenta que estas Representaciones:

- No tienen capacidad explicatoria
- No están basadas en teoría económica
- Consisten, esencialmente, en técnicas de suavizado y no en modelos económicos.

Por consiguiente, si al utilizar este tipo de modelos, nos proporcionan estimaciones deficientes, salvo las relacionadas con la mala calidad de las estimaciones efectuadas sobre los parámetros no tendremos posibilidad de explicación para enmendar nuestros fallos. Además si nuestro interés radica en el comportamiento de un sistema económico estos procedimientos son totalmente inadecuados.

A pesar de lo anteriormente expuesto, el interés de los económetras en este tipo de Representaciones deriva de su relación con el problema de estimación en modelos con retardos distribuidos.

A partir del modelo:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x(t-j) + a_t$$

suponiendo que a_t es ruido blanco y que llegamos a:

$$y(t) = x(t) + y(t-1) + a_t - a_{t-1}$$

que con la excepción del término $x(t-1)$ es una Representación mixta, ARMA(1,1) recibiendo la completa la denominación de caso especial de ARMA(1,1).

Además puede demostrarse que este modelo deriva de la hipótesis de expectativas adaptables.

Esencialmente el modelo de expectativas adaptables consiste en suponer que la variable, $y(t)$, se relaciona con el nivel esperado de la variable $x(t)$, que llamaremos $x^k(t)$, de acuerdo con:

$$y(t) = a x(t) + u_t$$

y donde se postula que la variable aleatoria u_t es ruido blanco. En estas condiciones con $x^k(t)$ no es observable se supone, también, que:

$$x^k(t) - x^k(t-1) = c x(t-1) - x^k(t-1)$$

lo cual implica que se revisan las expectativas, linealmente, de acuerdo con el error de previsión más reciente.

Por tanto:

$$x^k(t) 1 - (1-c)B = c x(t-1)$$

o sea:

$$x^k(t) = \frac{c x(t-1)}{1 - (1-c)B} = c(1 + (1-c)B + (1-c)^2 B^2 + \dots) x(t-1)$$

indicando esta expresión que el nivel deseado de la variable $x(t)$ se consigue a través de una ponderación

geométrica decreciente de sus observaciones pasadas.

Sustituyendo, llegamos a:

$$y(t) = \frac{ac}{1-(1-c)B} x(t-1) + u_t$$

que es, esencialmente, el mismo modelo de retardos distribuidos expuesto anteriormente.

Por tanto, los modelos ARMA(1,1) están, justificados al contar con un sustrato, razonable, de teoría económica. Estas mismas conclusiones pueden predicarse para las AR(1) y MV(1) por ser casos particulares del modelo anterior.

Por último, las Representaciones de orden finito pueden interpretarse en el sentido de decir que, el horizonte de planificación al que se ajustan tiene una estructura de ponderaciones que, desde un punto de vista práctico, reducen el número de observaciones pasadas a tener en cuenta, a un número limitado de las mismas.

NOTAS AL CAPITULO I

- 1) Gikhman-Skorohod. "Introduction to the theory of Random processes". Ed. W.B. Saunders. 1969. Pags. 1-5.
A. Papoulis. "Probability, Random and stochastic processes". Mc Graw Hill, International student edition, 1965, cap. 9.
- 2) J. Marschak. "Economic Measurements for Policy and Prediction". Incluido en "Studies in Econometric Method", Ed. Hood y Koopmans. Cowles Foundation, Monograph nº 14, pags. 3-8.
- 3) A. Papoulis opus cit. pag. 296.
- 4) Si nos referimos a una sola variable aleatoria la autocovarianza para $t_1=t_2$ es la varianza de esa serie para $t=t_1$, y ambos términos se utilizan indistintamente. Además, para $x(t)$ también puede utilizarse los términos AUCOV y COV.
- 5) Algunos autores como Papoulis (v. Papoulis en su obra citada) definen la autocorrelación del proceso $x(t)$ como:
$$R_x(t_1, t_2) = E x(t_1) x(t_2)$$
- 6) A. Papoulis. Op. cit. pág. 301.
- 7) En alguna ocasión será conveniente transformar los datos originales para obtener una dispersión homogénea de las desviaciones de los valores observados respecto de su valor medio.

- 8) Otra forma de referirse a los procesos estacionarios en sentido amplio es el denominarlos procesos de covarianza estacionaria o, también, estacionariedad en sentido débil.
 - 9) Dhrymes. "Econometrics, statistical foundations and applications". Harper international Edition (1970) pags. 386-392.
 - 10) Recordemos que, convergencia en media cuadrática implica convergencia en probabilidad y que, para un estimador, implica insesgadez asintótica y nula varianza asintótica.
 - 11) G.S. Fishman. "Spectral Methods in Econometrics". Harvard University Press (1969), pág. 13.
 - 12) A. Papoulis. Op. cit. págs. 323-328.
 - 13) YAGLOM. "An introduction to the theory of stationary Random functions" Englewood cliffs prentice Hall (1962) pags 20-21
- NOTAS AL CAPITULO 2
- 1) Jenkins y Watts. "Spectral analysis and its. applications". Holden Day (1968) Capítulo 6.
 - 2) Fishman. Op. cit. pág. 82.
 - 3) Distinguiremos entre el valor teórico y una estimación designando con letras mayúsculas el primero y con minúsculas el segundo.
 - 4) E. Parzen. "Mathematical considerations in the estimation of spectra". Technometrics Vol. 3 nº 2, mayo 1961, págs. 167-190.

- 5) En 2.3.7 abordamos el problema de seleccionar el número de intervalos en que estimar el espectro.
- 6) M. Kerlove. "Spectral analysis of seasonal, adjustment procedures". *Econometrika* Vol. 32, 3 julio (1964) pág. 242.
- 7) $g(0)$ es el valor espectral correspondiente a la frecuencia $f=0$ según se verá más adelante.
- 8) Véase 3.1 en donde nos referimos a la posibilidad de existencia de las representaciones en Media Móvil.
- 9) Bartlett. "On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series". *J.R.S.S. B. 8* 27-1964.
- 10) En 2.3.3 se muestra que la función de autocorrelación y el espectro son pares de transformadas de Fourier.
- 11) Véase G.M. Jenkins. "General considerations in the analysis of spectra". *Technometrics* Mayo 1961, págs. 133-166.
- 12) Nervole. Op. cit. pág. 244.
- 13) $A^2/2$ es la potencia media recogida sobre una resistencia pura de un OMHIO generada por un voltaje sinusoidal $v=A \sin wt$.
- 14) Yaglom. Op. cit. pág. 36.
- 15) Dhrymes. Op. cit. pág. 555.

- 16) $dF(w) = f(w) dw$ recibiendo $f(w)$ el nombre de función de densidad espectral.
- 17) M. Denis-Papin et Kaufmann. "Cours de calcul operationnel". Edit. Dunod ani 1960, págs. 98-101.
- 18) Puig-Adam. Cálculo Integral. Op. cit. págs 151 y s.s.
- 19) $\Delta S = \frac{1}{T}$ y cuando $T \rightarrow \infty$ la velocidad angular, w , se transforma en $\Delta w = \frac{2\pi}{T}$, por tanto s representa la frecuencia $\frac{w}{2\pi}$.
- 20) Para estar de acuerdo con las definiciones dadas en 2.3.2 el espectro contiene el factor $\frac{1}{2\pi}$, que no se asocia en cambio a $y(t)$. Nosotros utilizaremos este último convenio. De no hacerlo seguiríamos la notación de PAPOULIS op. cit. pág. 338.
- 21) La expresión obtenida en 2.3.2

$$AUCOV(K) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwk} dG(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jwk} g(w) dw$$
 puede, facilmente, identificarse con la expresión del espectro de $x(t)$.
- 22) También puede verse B.M. Brown. "The mathematical theory of linear systems" science paperbacks (1965) págs. 38-39.
- 23) Jenkins and Watts. Op. cit. pág. 215.
- 24) Las series temporales con las que trabajaremos estarán definidas a intervalos iguales. Es la situa-

ción práctica con la que siempre nos encontraremos en Economía puesto que en ninguna ocasión dispondremos de series continuas.

- 25) Dada una función $s(w)$ positiva, o equivalentemente una función semidifinida positiva como $AUCOV(K)$, se puede encontrar un proceso estocástico, $x(t)$, que tenga $s(w)$ como espectro y $AUCOV(K)$ como función de autocovarianza. A. Papoulis op. cit. pág. 350.
- 26) ALIASING. N.T.
- 27) Jenkins y Watts. Op. cit. págs. 48-53.
- 28) Banda de frecuencia es el conjunto de frecuencias comprendidas entre dos frecuencias límite, es decir $\{f \mid f_1 \leq f \leq f_2\}$ serán la banda de frecuencias $[f_2 - f_1]$.
- 29) Como caso particular puede ser de una sola frecuencia, si bien esta es una propiedad teórica pues, al diseñar filtros prácticos, nunca podemos tener un ancho de banda tan reducido.
- 30) Desde un punto de vista frecuencial y de acuerdo con lo apuntado en las páginas anteriores al ser la frecuencia mínima detectable la correspondiente al período $\frac{T}{2}$, siendo T el ámbito temporal de la muestra podemos asociar a la tendencia todo el conjunto de frecuencias menores que la mínima detectable. G.W. J. Granger. "The typical spectral shape of an Economic variable". Econometrica XXXIV (Enero 1966) págs. 150-161.

- 31) Si el exponente S es negativo en lugar del operador retardo tendremos definido el operador de adelanto que más adelante le denominaremos operador F .
- 32) Para un análisis más detallado de este tipo de filtros puede verse J. Hoyo "Desestacionalización de series temporales". Documentación del primer Seminario Iberoamericano de Coyuntura (1975) págs. 55-76.
- 33) Papoulis. Op. cit. pág. 97.
- 34) H. Theil. "Principles of Econometrics". John Wiley and sons (1971) Cap. 11.
- 35) Siempre que la función sea absolutamente continua.
- 36) Sólo nos fijamos en las expresiones correspondientes a procesos discretos puesto que en las situaciones con que nos enfrentamos rara vez estaremos en presencia de uno continuo.
- 37) Hacia finales del siglo XVIII y principios del XIX, se desarrolló por Lagrange, Euler y Fourier la idea de que una función analítica podía representarse sobre un intervalo en base a una combinación de funciones circulares. Como consecuencia de los desarrollos teóricos anteriores, se llegó al análisis armónico de una función (descomposición de su varianza).

Schuster en 1898 sugirió el cálculo del pedigráfico para descomponer la varianza de una serie y discernir, así, la importancia relativa de las diferentes componentes periódicas. En suma el pedigráfico no es más que una representación gráfica de las varianzas asociadas con las frecuencias w_j que conforman la serie.

La idea básica detrás del pediógrama está relacionada con el hecho de que las series a estudiar representaban un aspecto visual que indicaba una variación relativamente suave de la serie, lo cual sugería que la serie no era completamente aleatoria, es decir, existía dependencia entre las observaciones registradas en diferentes instantes o intervalos de tiempo. Además se percibían fluctuaciones con un período relativamente estable, y ello llevó a intentar extraer esas fluctuaciones enmascaradas por el resto de la serie a través de modelos del tipo:

$$x(t) = \sum_{j=1}^k A_j \sin(w_j t + \theta_j) + \eta_t$$

donde η_t era completamente aleatoria. En la práctica, todos estos modelos fracasaban porque K se hacía muy grande (haciendo superar en número excesivamente grande de periodicidades para las que no era fácil encontrar una explicación que las identificase). Concretamente Shuster llevaba a cabo la estimación del pediógrama a través de la relación

$$I_n(w) = \frac{1}{n} \left[\left(\sum x(t) \cos wt \right)^2 + \left(\sum x(t) \sin wt \right)^2 \right]$$

mientras que nosotros hemos aludido a que una estimación conveniente del espectro parecía ser:

$$\tilde{g}(w) = \frac{1}{2\pi} \left[\text{aucov}(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{aucov}(k) \cos wk \right]$$

se puede demostrar (véase Hannan "Time series analysis" pág. 32-35 o bien Dhrymes, págs 422-426) que $\frac{Dr(w)}{2\pi}$ es un estimador insesgado pero no un estimador consistente de $g(w)$. Precisamente fué esta falta de consistencia en las estimaciones lo que moti-

vó el fracaso de la técnica del pedigráfico.

38) Hannan. "Time series analysis". Science paperbacks (1960), Cap. XII.

39) G. Jenkins. "General considerations in the analysis of spectra". Technometrics Vol. 3 nº2 Mayo 1961, págs. 133-166.

40) Este hecho no impide el uso de las ponderaciones de Tokey-Hanning, puesto que en lo que debemos fijarnos no es una serie de puntos concretos del espectro sino en su forma conjunta.

41) G. Jenkins. Op. cit. págs. 145-148.

NOTAS AL CAPITULO 3

1) Normalmente se habla de tres retardos: detección, toma de decisión y desfase entre la puesta en práctica de la medida y la constatación de los plenos efectos de la misma. Estos retardos pueden desmenuzarse en mayor medida de acuerdo con el gusto por las clasificaciones que uno tenga.

2) La teoría cuantitativa simple en la versión de Cambridge indica $M v_y = P_y y$ donde tomando logaritmos se tiene:

$$\ln M + \ln v_y = \ln P_y + \ln y$$

y por tanto:

$$\frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta v_y}{v_y} \approx \frac{\Delta P_y}{P_y} + \frac{\Delta y}{y} \implies \frac{\Delta M}{M} \approx \frac{\Delta P_y}{P_y}$$

3) El control al que nos referimos es uno de tipo estático en el sentido que nos fijamos, exclusivamente, en las situaciones inicial y final. Si, además, nos

preocupa la forma en que se alcanza la posición de llegada, estamos frente a un problema de control dinámico.

- 4) Fishman. Op. cit. pág. 49 y s.s.
- 5) Por analogía con la regresión en que los regresores son la misma variable endógena retardada.
- 6) Continuamos suponiendo que la media de la sucesión aleatoria es cero.
- 7) Fishman. Op, cit. pág. 51.
- 8) G. Arnaiz. "Introducción a la Estadística Teórica". Editorial Lex Nova (1965) págs. 119-143,
- 9) Otra demostración de la estacionariedad puede encontrarse en G.E.P. Box and G.M. Jenkins. Holden Day (second printing 1971)págs. 49 y 80-82.
Time series analysis Forecasting and control
- 10) En este trabajo necesitamos condiciones de invertibilidad para situaciones no estacionarias dado que las series temporales que sean objeto de estudio presentan fuertes tendencias.
- 11) También la designaremos "zona permisible".
- 12) Box and Jenkins. Op. cit. pág. 54.
- 13) Fishman. Op. cit. pág. 52.
- 14) R.G.D. Allen. "Economía Matemática". Ed. Aguilar (1965) Cap. VI.

- 15) M.G. Kendall and A. Stuart. "The advanced Theory of Statistics". Vol. nº 2 (Third edition)(1972) Cap. 27.
- 16) Box and Jenkins. Op. cit. págs. 72-73.
- 17) Box and Jenkins. Op. cit. págs. 59-60.
- 18) Hannan. "Multiple time series". John Wiley and sons (1970) págs. 9-18.
- 19) Es decir con las propiedades habituales de media cero independendencia entre las variables para dos instantes diferentes y varianza común para todo t.
- 20) Las representaciones se han llevado a cabo son normalizadas en el sentido de que, en lugar de representar $g_x(w)$, se ha efectuado la de

$$\frac{2n \cdot g_x(w)}{\sigma^2}$$

- 21) Téngase en cuenta que:

$$MV(K_2) = ARMA(0, K_2)$$

$$AR(K_1) = ARMA(K_1, 0).$$

NOTAS AL CAPITULO IV

- 1) Kendall y Stuart. "The advanced theory of Statistics". Vol. I, págs. 163-173.
- 2) Box-Jenkins. Op. cit. págs. 196-197.

- 3) Box-Jenkins. Op. cit. pág. 81.
- 4) Esta misma demostración puede extenderse a pares de raíces complejas conjugadas.
- 5) Llamado también "Principio de parsimonia".
- 6) Recordemos que las MV(K) y AR(K) son casos particulares de la Representación Mixta.
- 7) M.H. Quenouille. "Approximate tests of correlation in time series". J.R.S.S. B₁₁ 68-1949.
- 8) G.E.P. Box and D.A. Pierce. "Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models". J.A.S.A. 64, 1970, págs. 1509-1526.
- 9) Stralkowski, Wu, Devor(1). "Charts for the interpretation and estimation of the second order autoregressive model". Technometrics, Vol. 12 nº 3 1970.

Stralkowski, Wu, Devor(2). "Charts for the interpretation and estimation of the second order moving average and mixed first order. Autoregressive-moving average models". Technometrics Vol. 16 nº 2 1974.
- 10) Véase el Capítulo V relativo a la estimación de los parámetros.
- 11) Box-Jenkins. Op. cit. Cap. VI.
Stralkowski (2). Op. cit.
Naylor y T.G. Seaks. "Box-Jenkins Methods: An alternative to Econometric Models", int. stat. Rev. Vol 40 nº 2, 1972, págs. 123-127.

- 12) Este hecho se observa en los gráficos 6-a - 6-k del capítulo VI.
- 13) Calculamos $\frac{\sigma^2}{n}$, en lugar de $\frac{\sigma^2}{2n}$, dado que según el método de cálculo que se utiliza normalmente el área bajo el espectro, y referido exclusivamente a las frecuencias positivas, proporciona la varianza total del proceso.
- 14) Nótese que para esta relación no hay diferencias entre el espectro y el espectro normalizado.
- 15) Las AR(1) y MV(1) no admiten picos intermedios y las MV(2) y ARMA (1,1) sólo con perfiles suaves. Por otra parte el margen de variación de la ordenada espectral para MV(1) está comprendido entre cero y cuatro y el correspondiente a MV(2) entre la anterior y diez y seis.
- 16) Véase 5.2.
- 17) Podíamos definir aquí como se hace en Ingeniería de Telecomunicación el ancho de banda como la diferencia entre las frecuencias a las que corresponde una ordenada espectral que sea aproximadamente el 0,707 del máximo.
De acuerdo con lo dicho anteriormente el ancho de banda, asociado a los picos espectrales en MV(2) y ARMA (1,1), es más ancho que el correspondiente a una AR(2).
- 18) Jenkins y Watts. Op. cit. págs. 150-152.
- 19) Box and Jenkins. Op. cit. págs. 85-93.

- 20) Box and Jenkins. Op. cit.
- 21) T.H. Naylor y T.G. Seaks. Op. cit.
- 22) Box y Jenkins. Op. cit. pág. 194.

NOTAS AL CAPITULO V

- 1) D.J. Aigner. "A compendium on estimation of the autoregressive moving average Model from time series data". International Economic Review Vol. 12 nº 3 Oct. 1971, págs. 348-371.
- 2) Box y Jenkins. Op. cit. Cap. VII.
- 3) Charles Nelson. "The first order Moving average process identification, estimation and prediction". Journal of Econometrics 2(1974) págs. 121-141.
- 4) En este trabajo no se han utilizado los métodos teóricos más correctos, por no haber sido posible conseguir el programa de ordenador adecuado en el centro del cálculo de la Universidad de Madrid.
- 5) Whittle. "Hypothesis testing in time series" (1951)
Whittle. "Estimation and informations in ~~S~~ stationary time series".
~~Whittle~~. "Arkiv för Matematik (Stockholm) II(1953) págs. 423-434.
- 6) A.M. Walker. "Large sample estimation of parametrics for autorregressive processes with M.A. residuals. Biometrika, June 1962, págs. 117-131.
A.M. Walker. "Asymptotic properties of L.S. estimates of paramet~~ers~~ of the espectrum of a stationary non-deterministic time series". Journal of the Australian Mathematics society (1964) págs. 363-384.

- 7) Whittle. "Hypothesis testing in time series". Almqvist and Wiksells, 1951, Cap. VII.
- 8) *Algner op. cit. pag. 357*
- 9) Durbin J.(1). "Efficient estimation of parametrics in Moving average Models". Biometrics XLVI, Diciembre 1959; págs. 306-316.
- 9) Durbin J.(2). "The fitting of time series Models". Review of the international estatistical institute (1960) págs. 233-244.
- 10) Mann y Wald. "On the statistical treatment of linear estochastic difference Equations". Econometrica (Julio-Octubre 1943) págs. 173-220.
- Rubin. "Consistency of Maximun likelihood. Estimates in the explosive case". Statistical inference in Dynamic Economic Models; Commisiõn Monograph 10, págs. 156-364.
- 11) Véase, por ejemplo, A.S. Goldberger.
- 12) Para un análisis más detallado de este procedimiento y de otros para la resolución de problemas no lineales véase Draper and Smith. "Applied Regression Analysis". Capítulo X. John Wiley.
- 13) Draper y Smith. Op. cit. págs. 273-274.
- 14) Durbin J.(1). Op. cit. Biometrika XLVI. Diciembre 1959, págs. 306-316.
- Durbin J.(2). Op. cit. 1960, págs. 233-244.
- 15) Man y Vald. Op. cit. págs 173-220.
- Rubin. Op. cit.

- 16) C.M. Stralkowsky. S.M. W.U. and R.E. Devok (1).
Op. cit.
- 17) Coldberger. Op. cit. págs. 171-174.
en particular $b - \beta = (x'x)^{-1} x'e$.
 $(b - \beta)' x'x(b - \beta) = e'x(x'x)^{-1}x'e = e'P_x e$
y como
 $ssE = e'(I - P_x).e = e'e - e'P_x e$
y por tanto
 $e'P_x e = e'e - ssE$
- 18) Box and Jenkins. Op. cit. pág. 281.
- 19) M.G. Kendall and A. Stuart. "The advanced theory
of statistics" Vol. III(segunda edición) págs. 478-
481.
- 20) Ch. R. Nelson. Op. cit.
- 21) O.D. Anderson. "And Inequality with a time series
application". Journal of Econometrics 2(1974) págs.
189-193.
- 22) Box and Jenkins. Op. cit. pág. 241.
- 23) Stalkowski, Wu, y Devon. (1974)(2) op. cit. págs.
275-285.
- 24) Box - Jenkins op. cit. pag 284

NOTAS AL CAPITULO VI

- 1) M. Rodríguez Rodríguez-Zúñiga(1). "Análisis de una
serie histórica: determinación de componentes y for-
mulación de modelos interpretativos". Cuadernos de
Economía. Vol. 3 nº 6, Enero-Abril 1975, págs. 91-
139.

- 2) M. Rodríguez Rodríguez-Zúñiga (2). "Incidencia sectorial en la estructura de los precios al por mayor: un estudio comparativo de los sectores agrícola e industrial". Revista Española de Economía. Enero-Abril 1975 págs. 101-139.
- 3) Se trata del índice de precios al por mayor de productos agrícolas.
- 4) M. Rodríguez Rodríguez-Zúñiga (2). Op. cit. pág. 101.
- 5) R. Rodríguez- Zúñiga (1). Op. cit. págs. 112-113.
- 6) "Estadística Española" nº 45. Octubre-Diciembre 1969.
- 7) Box and Jenkins. Op. cit. Capítulo IX.
- 8) ~~Granger-Morgenstern~~ "Spectral analysis of Economic Time series" ~~1963~~ ¹⁹⁶⁴ ~~Vol. 1~~ ^{Vol. 1} ~~pp. 1-27~~ ^{pp. 1-27} ~~Princeton~~
- 8) Granger-Morgenstern "Spectral analysis of stock market prices" ~~Kylos (1963) XVI pp. 1-27~~
- 9) ~~Granger-Morgenstern~~ ^{Granger} ~~la abreviatura utilizada es~~ ^{la abreviatura utilizada es} ~~"est."~~ ^{"est."} ~~VN~~
- 9) Granger "Spectral analysis of Economic Time series" ~~publicado U. Penn (1964)~~ ^{publicado U. Penn (1964)} ~~Cap 9-10~~
- 10) Epígrafes 4.2 y 4.3.
- 11) Los distintos coeficientes de autocorrelación parcial se han obtenido a través del procedimiento iterativo de Durbin.
- 12) En el gráfico del espectro se ha incluido una banda de confianza, simultánea, para las estimaciones espectrales. Existen varios procedimientos de obtenerlas, unos de ellos es el de Naylor y colaboradores, trabajo publicado en "Spectral analysis of data generated by simulation experiments with econometric models" publicado en Econometría Vol. 37 nº 2 Abril-1969, págs. 333-352.

La banda de confianza se cálculo como sigue: Si la estimación del espectro es razonablemente suave, la relación $g(f)/G(f)$, siendo $g(f)$ la estimación correspondiente a $G(f)$ se distribuye como una con $K = \frac{2n}{m}$ grados de libertad (donde n es el número de observaciones y m los puntos espectrales estimados. Por consiguiente, un intervalo de confianza para f_j para $\alpha = 0,5$, vendrá dado por:

$$\Pr \left(\frac{\chi^2_{0,975,K}}{K} < \frac{g(f_j)}{G(f_j)} < \frac{\chi^2_{0,025,K}}{K} \right) = 0,95$$

o bien:

$$\Pr \left(\frac{g(f_j)}{\frac{\chi^2_{0,025,K}}{K}} < G(f_j) < \frac{g(f_j)}{\frac{\chi^2_{0,975,K}}{K}} \right) = 0,95$$

A partir de este resultado anterior se puede calcular una banda de confianza, simultánea, para todas las frecuencias.

Si $\Pr(B_j) = 0,05/(m+1)$ ($j=0,1,\dots,m$) es la probabilidad de cometer un error en la estimación correspondiente a f_j , la probabilidad total será:

$$\Pr(B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_m) \leq \Pr(B_0) + \Pr(B_1) + \dots + \Pr(B_m) = \\ = (m+1) \frac{0,05}{(m+1)} = 0,05.$$

Por tanto, si cada estimación individual tiene un error de $0,05/m+1$, entonces dado que para nosotros $m=16$, será $0,05/16+1 = 0,003$ la probabilidad del extremo de la distribución. La banda de confianza simultánea:

$$\Pr \left(\frac{g(f_j)}{\frac{\chi^2_{0,003}}{K/K}} < G(f_j) < \frac{g(f_j)}{\frac{\chi^2_{0,997}}{K/K}} \right) = 0,095$$

$j=0,1,\dots,16$

Hatanaka. "Spectral analysis of Economic time series". págs. 62-63, presentan directamente como banda

de confianza:

$$\left(T_{\alpha} \left[(m, N) g(f_j), \quad T'_{\alpha} (m, N) g(f_j) \right) \right)$$

y si se estima a través de Tukey-Hanning se tiene que:

$$T_{\alpha} (m, N) \sim \frac{\chi^2_{100-\alpha} (K)}{K}$$

$$T_{\alpha'} (m, N) \sim \frac{\chi^2_{\alpha} (K)}{K}$$

siendo $K = \frac{2N}{N}$; y tabulando para distintos valores de K y $\alpha = 5\%$ y 10% .

$K = \frac{2N}{N}$ EXCEDIDO POR EL 95% DE TODOS LOS VALORES EXCEDIDO POR EL 90% DE TODOS LOS VALORES EXCEDIDO POR EL 10% DE TODOS LOS VALORES EXCEDIDO POR EL 5% DE TODOS LOS VALORES

	(T _{5%})	(T _{10%})	(T _{10%})	(T _{5%})
2	0,05	0,10	2,30	2,99
3	0,12	0,20	2,08	2,60
4	0,18	0,26	1,94	2,37
5	0,23	0,32	1,85	2,21
6	0,27	0,37	1,77	2,10
8	0,34	0,44	1,68	1,94
10	0,39	0,49	1,60	1,83
12	0,43	0,53	1,55	1,74
15	0,48	0,57	1,48	1,66
20	0,54	0,62	1,42	1,51
30	0,62	0,69	1,34	1,46
50	0,69	0,75	1,26	1,34
100	0,77	0,82	1,18	1,22

Tabla que hemos utilizado en el cálculo de las bandas de confianza al 5%.

13) Debe tenerse en cuenta que la contribución a la varianza de los términos despreciados, entra a través de la suma $f_3 r(3) + f_4 r(4) + \dots$

14) R. Rodríguez-Zúñiga (2). Op. cit.

- 15) Su ámbito temporal abarca el período 1961-1971 mientras que el nuestro es 1964-1974.
- 16) Otro de los problemas que tiene su método de identificación le lleva a identificar, para la serie índice general de precios al por mayor que presenta una fuerte tendencia creciente, una Representación que no toma en cuenta la no estacionariedad de la misma. Tal sucede con la primera de ellas (1,0,4) que no incluye ninguna diferencia de la serie que la reduzca a estacionariedad. Además, de lo anterior se presenta otro problema al no tomar en consideración, adecuadamente, la componente estacional que lleva asociada, dado que debería incorporar necesariamente un filtro del tipo $(1 - \ell B^{12})$.
- 17) En realidad es el estadístico $n(n+z) \sum_{n=1}^m (n-k)^{-1} r(k)^2$ el que en forma más aproximada se distribuye como con m grados de libertad, aunque este en la práctica se simplifica en $n \cdot \sum_{k=1}^m r(k)^2$. Para más detalles véase G.E.P. Box and David Pierce "Distribution of Residual autocorrelation in autorregressive integrated moving average time serie models" J.A.S.A. December 1970, Vol. 65 nº 332, págs. 1509-1526.
- 18) Jenkins y Watts. Op. cit. pág. 212
- 19) Rodríguez Rodríguez-Zúñiga (2), Op. cit.
- 20) En este caso no aludimos a las de primer orden para intentar recoger el mínimo que se produce próximo a la frecuencia de 0,25. Además si fuera una AR(1) es parámetro sería $f_1 = 0,142$ por tanto:

$$\sigma^2 = 19,64(1-0,142^2) \simeq 19,24 \quad ; \quad \frac{\sigma^2}{n} \simeq 6,126$$

$$g(w) \text{ nor max} = \frac{10}{6,126} \approx 1,63$$

$$g(w) \text{ nor min} = \frac{3,5}{6,126} \approx 1,36$$

y los teóricos:

$$g(w) \text{ nor max} = \frac{1}{1+0,142^2-2 \cdot 0,142} \approx 1,36$$

$$g(w) \text{ nor min} = \frac{1}{1+0,142+2 \cdot 0,142} \approx 0,77$$

que dan peor resultado que los de AR(2) e igual sucede con NV(1).

- 21) En este caso se hace bastante difícil la estimación adecuada de los parámetros.
- 22) No calculamos aquí las desviaciones típicas de las estimaciones por ser similares a casos anteriores y ver directamente que son significativamente distintos de cero.
- 23) Por la forma parecería, a primera vista, que podría tratarse también de una AR(1), pero analizando con más cuidado hay que descartarla, puesto que, para el parámetro que le correspondería $f_1 \approx \tau(1) \approx 0,379$ la forma del espectro se asemeja a la del estimador.

Valores máximos de $R(K_1)$ para MV (K_2)

$K_1 \backslash K_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,5														
2	0,707	0,5													
3	0,809	0,5	0,5												
4	0,866	0,707	0,5	0,5											
5	0,901	0,707	0,5	0,5	0,5										
6	0,924	0,809	0,707	0,5	0,5	0,5									
7	0,940	0,809	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5								
8	0,951	0,866	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5							
9	0,960	0,866	0,809	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5						
10	0,966	0,901	0,809	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5					
11	0,971	0,901	0,809	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5				
12	0,975	0,924	0,866	0,809	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5			
13	0,978	0,924	0,866	0,809	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5		
14	0,981	0,940	0,866	0,809	0,707	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	
15	0,983	0,940	0,901	0,809	0,809	0,707	0,707	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Cuadro para calcular los ejes Mayor y Menor de la zona de confianza de ARMA (1,1).

($\pm F_1$)

		$\pm .95$	$\pm .90$	$\pm .80$	$\pm .70$	$\pm .60$	$\pm .50$	$\pm .40$	$\pm .30$	$\pm .20$	$\pm .10$	0.00
T_1 +	$\pm .95$ C ₁	∞	1.10	1.54	1.85	2.10	2.29	2.43	2.52	2.58	2.60	2.58
	C ₂	0.54	0.74	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.76
	$\pm .90$ C ₁	1.10	∞	1.72	2.06	2.34	2.55	2.71	2.80	2.83	2.82	2.77
	C ₂	0.74	0.75	0.99	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04
	$\pm .80$ C ₁	1.54	1.72	∞	3.75	3.61	3.71	3.75	3.72	3.61	3.46	3.29
	C ₂	0.75	0.99	1.03	1.17	1.24	1.27	1.30	1.31	1.33	1.34	1.36
	$\pm .70$ C ₁	1.85	2.06	3.75	∞	9.50	6.91	5.94	5.31	4.80	4.38	4.01
	C ₂	0.75	1.01	1.17	1.23	1.31	1.37	1.41	1.45	1.47	1.50	1.52
	$\pm .60$ C ₁	2.10	2.34	3.61	9.50	∞	17.5	10.5	7.97	6.57	5.64	4.97
	C ₂	0.75	1.02	1.24	1.31	1.38	1.44	1.48	1.52	1.55	1.58	1.60
	$\pm .50$ C ₁	2.29	2.55	3.71	6.91	17.5	∞	23.9	13.1	9.43	7.48	6.26
	C ₂	0.75	1.02	1.27	1.37	1.44	1.49	1.54	1.58	1.61	1.63	1.65
	$\pm .40$ C ₁	2.43	2.71	3.75	5.94	10.5	23.9	∞	28.3	15.0	10.5	8.12
	C ₂	0.75	1.03	1.30	1.41	1.48	1.54	1.58	1.62	1.64	1.67	1.68
	$\pm .30$ C ₁	2.52	2.80	3.72	5.31	7.97	13.1	28.3	∞	31.4	16.3	11.1
	C ₂	0.75	1.03	1.31	1.45	1.52	1.58	1.62	1.65	1.67	1.69	1.70
	$\pm .20$ C ₁	2.58	2.83	3.61	4.80	6.57	9.43	15.0	31.4	∞	33.5	17.0
	C ₂	0.75	1.03	1.33	1.47	1.55	1.61	1.64	1.67	1.69	1.71	1.72
	$\pm .10$ C ₁	2.60	2.82	3.46	4.38	5.64	7.48	10.5	16.3	33.5	∞	34.5
	C ₂	0.75	1.04	1.34	1.50	1.58	1.63	1.67	1.69	1.71	1.72	1.72
	0.00 C ₁	2.58	2.77	3.29	4.01	4.97	6.26	8.12	11.1	17.0	34.5	∞
	C ₂	0.76	1.04	1.36	1.52	1.60	1.65	1.68	1.70	1.72	1.72	1.73
T_1 -	$\mp .10$ C ₁	2.54	2.69	3.11	3.69	4.44	5.39	6.67	8.51	11.5	17.3	34.5
	C ₂	0.76	1.04	1.37	1.53	1.62	1.67	1.70	1.71	1.72	1.73	1.72
	$\mp .20$ C ₁	2.47	2.58	2.92	3.40	4.00	4.73	5.65	6.88	8.64	11.5	17.0
	C ₂	0.76	1.05	1.38	1.55	1.63	1.68	1.71	1.72	1.72	1.72	1.72
	$\mp .30$ C ₁	2.37	2.45	2.73	3.14	3.63	4.20	4.88	5.74	6.88	8.51	11.1
	C ₂	0.76	1.05	1.39	1.56	1.64	1.69	1.71	1.72	1.72	1.71	1.70
	$\mp .40$ C ₁	2.25	2.30	2.54	2.89	3.29	3.75	4.27	4.88	5.65	6.67	8.12
	C ₂	0.76	1.06	1.40	1.56	1.64	1.68	1.70	1.71	1.71	1.70	1.68
	$\mp .50$ C ₁	2.10	2.14	2.34	2.64	2.98	3.35	3.75	4.26	4.73	5.39	6.26
	C ₂	0.76	1.06	1.40	1.56	1.64	1.67	1.68	1.69	1.68	1.67	1.65
	$\mp .60$ C ₁	1.93	1.95	2.13	2.40	2.69	2.98	3.29	3.63	4.00	4.44	4.97
	C ₂	0.76	1.06	1.40	1.55	1.61	1.64	1.64	1.64	1.63	1.62	1.60
	$\mp .70$ C ₁	1.71	1.72	1.90	2.15	2.40	2.64	2.89	3.14	3.40	3.69	4.01
	C ₂	0.76	1.07	1.39	1.50	1.55	1.56	1.56	1.56	1.55	1.53	1.52
	$\mp .80$ C ₁	1.43	1.45	1.66	1.90	2.13	2.34	2.54	2.73	2.92	3.11	3.29
	C ₂	0.76	1.07	1.32	1.39	1.40	1.40	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36
	$\mp .90$ C ₁	1.05	1.12	1.45	1.72	1.95	2.14	2.30	2.45	2.58	2.69	2.77
	C ₂	0.77	1.01	1.07	1.07	1.06	1.06	1.06	1.05	1.05	1.04	1.04
	$\mp .95$ C ₁	0.78	1.05	1.43	1.71	1.93	2.10	2.25	2.37	2.47	2.54	2.58
	C ₂	0.74	0.77	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76

Mo no	M E S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ct.	Nv.	Dc.
64	163,8	164,8	162,7	164,4	160,7	163,2	169,4	170,9	172,2	176,3	177,7	178,9
65	179,6	182,1	183,4	185,9	185,6	184,2	187,5	187,4	188,9	188,3	188,4	188,5
66	191,0	189,1	189,3	190,2	189,4	192,4	192,6	191,0	191,0	188,8	191,1	191,8
67	191,2	191,8	192,6	191,4	190,7	188,8	190,0	191,9	192,7	193,4	193,1	193,5
68	195,7	196,5	196,8	194,4	195,4	196,3	194,4	195,4	195,1	196,1	196,5	197,1
69	197,8	198,3	197,5	198,3	203,0	202,8	202,3	200,7	202,4	202,5	202,8	202,8
70	201,6	200,9	201,7	205,1	201,8	202,8	204,0	206,3	205,2	207,2	207,1	207,2
71	210,4	212,2	212,8	212,3	212,8	215,2	216,0	215,9	218,0	219,1	220,5	224,1
72	226,1	227,0	227,1	226,0	229,3	230,8	230,0	231,2	233,8	234,1	236,2	236,7
73	238,0	241,4	242,4	246,6	248,4	251,6	254,9	259,3	260,2	265,0	271,2	276,2
74	276,5	284,9	288,2	289,7	295,3	298,1	300,6	306,1	309,0	312,7	319,4	324,0

Años	N			E			S			E			S			Do.
	En.	Feb.	Mar.	Ab.	Ma.	Jun.	Jul.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.					
64	174	175,6	171,4	173,9	166,6	171,6	181,6	184,1	186,3	193,0	195,0	197,5				
65	198,2	202,7	205,5	209,9	208,8	206,4	212,4	211,9	214,6	213,4	213,5	213,5				
66	217,8	213,6	213,5	215,1	213,5	218,9	219,1	215,9	216,0	217	216,1	217,3				
67	216	217,7	219	216,5	214,9	211,6	213,5	216,4	217,7	218,9	218,1	218,1				
68	222,6	223,8	224,4	220,4	222,3	223,9	220,4	221,9	221,3	223,0	223,4	223,9				
69	224,2	225,0	223,5	224,5	233,3	232,4	231,0	227,4	230,2	230,0	229,9	227,8				
70	226,5	225,1	225,7	231,1	224,3	225,8	227,5	231,6	229,1	232,3	232,3	232				
71	238	241	241,2	239,7	239,8	244,6	245,1	244,2	247,6	249,8	251,8	255,7				
72	261,6	260,1	262,4	259,3	265,0	268,4	265,2	265,8	268,9	268,2	271,3	269,8				
73	272,1	274,7	278,3	286,4	288,8	295,7	295,8	301,2	302,5	305,6	310,4	312,8				
74	312,7	319,7	320,7	320,3	324,6	326,2	326,1	330,5	334,6	341,1	354,9	362,6				

Años	M			E			S			Ot.	Nv.	Dc.
	En.	Fb.	Nr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.			
64		1,6	-4,2	2,5	-7,3	5,0	10,0	2,6	2,2	6,7	2,0	2,5
65	0,7	4,5	2,8	4,4	-1,1	-2,4	6,0	-0,5	2,7	-1,2	0,1	0,0
66	4,3	-4,2	-0,1	1,6	-1,6	5,4	0,2	-3,2	0,1	1,0	-0,9	1,2
67	-1,3	1,7	1,3	-2,5	-1,6	-3,3	1,9	2,9	1,3	1,2	-0,8	0,0
68	4,5	1,2	0,6	4,0	1,9	1,6	-3,5	1,5	-0,6	1,7	0,4	0,5
69	0,3	0,8	-1,5	1,0	8,8	-0,9	-1,4	-3,6	2,8	-0,2	-0,1	-2,1
70	-1,3	-1,4	0,6	5,4	-6,8	1,5	1,7	4,1	-2,5	3,7	-0,5	-0,3
71	6,0	3,0	0,2	-1,5	0,1	4,8	0,5	-0,9	3,4	2,2	2,0	3,9
72	5,9	-1,5	2,3	-3,1	5,7	3,4	-3,2	0,6	3,1	-0,7	3,1	-1,5
73	2,3	2,6	3,6	8,1	0,4	7,9	1,1	5,4	1,3	3,1	4,8	2,4
74	-0,1	7,0	1,0	-0,4	4,3	1,6	-0,1	4,4	4,1	6,5	13,8	7,7

VARIABLE: IPPA

Cuadro: 6-5

Años	M E S S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Ju.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Do.
64	175,6	176,8	168,5	176,1	165,4	168,1	173,0	180,0	180,7	187,9	191,3	194,5
65	196,2	200,6	200,7	200,8	206,4	202,3	201,8	211,5	212,1	209,7	207,5	208,5
66	217,0	212,2	212	214,3	211,9	221,4	217,6	218,6	215,7	207,2	214,2	216,7
67	218,4	220,6	217,1	212,3	208,8	206,1	205,9	210,2	211,8	212,1	213,4	213,3
68	228	223,7	221,7	216,8	219,4	222,6	214,8	217,1	217	217,8	217,9	218,3
69	217,4	218,9	216,7	218,1	231,0	230,2	226,7	222,6	226,5	226,8	226,1	226
70	219,5	220,8	220,6	229,7	219,4	217,9	224,5	228,9	224,9	228,9	228,6	227,9
71	234,3	238,0	237,9	234,4	232,1	237,6	236,3	234,5	237,2	238,1	238,7	241,9
72	247,1	244,7	247,5	241,9	249,7	252,2	247,8	247,2	250,8	250,8	254,6	246,5
73	249,8	253,0	256,3	266,3	266,6	277,5	276,4	280,5	280,3	283,3	290,8	297
74	301,3	305,7	304,1	298,9	303,9	308,7	307,3	313,5	317,5	323,0	330,1	332,2

Años	M			E			S			E			S			Dc.
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Ju.	Jl.	Ag.	Sp.	Oct.	Nv.					
64		1,2	-8,3	7,6	-10,7	3,3	4,3	7,0	0,7	7,2	3,4	3,2				
65	1,7	4,4	0,1	7,1	- 1,4	-4,1	-0,5	9,7	0,6	-2,4	-2,2	1,0				
66	8,5	-4,8	-0,2	2,3	- 2,4	9,5	-3,8	1,0	-2,6	-8,5	7,0	2,5				
67	1,7	2,2	-3,6	-4,8	- 3,5	-2,7	-0,2	4,3	1,6	0,3	1,3	-0,1				
68	14,6	-4,3	-2,0	-4,9	2,6	3,2	-7,8	2,3	-0,1	0,8	0,1	0,4				
69	-0,9	-1,5	-2,2	1,4	12,9	-0,8	-3,5	-4,1	3,9	0,3	-0,7	-0,1				
70	-6,5	1,3	-0,2	9,1	-10,3	-1,5	6,6	4,4	-4,0	4,0	-0,3	-0,7				
71	6,4	3,6	-0,1	-3,5	- 2,3	5,5	-1,3	-1,8	2,7	0,9	0,6	3,2				
72	5,2	-2,4	2,8	-5,6	7,8	2,5	-4,4	-0,6	3,6	0,0	3,8	-8,1				
73	2,3	3,2	3,3	10,0	0,3	10,9	-1,1	4,1	-0,2	3,0	7,5	6,2				
74	4,3	4,4	-1,6	-5,2	5,0	4,8	-1,4	6,2	4,0	5,5	7,1	2,1				

VARIABLE: IPAI

Cuadro: 6-7

Años	M E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64	166,8	165,8	165,3	165,5	165,6	166,7	176,1	180,6	181,2	133,5	185,6	185,8
65	186,8	186,9	187,8	187,5	188,6	189,1	189,8	191,0	191,1	138,5	189,7	186,4
66	187,1	186,3	185,7	186,0	186,0	186,8	188,0	188,8	190,0	190,0	189,5	189,4
67	190,8	191,0	192,2	192,7	193,4	194,1	199,2	199,3	199,6	201,6	201,9	200,8
68	203,7	202,8	201,3	200,9	201,3	201,7	200,7	201,2	201,2	202,0	203,0	204,2
69	203,8	206,5	205,8	205,9	206,4	205,9	205,5	203,5	203,2	203,3	203,7	202,7
70	202,2	201,8	201,6	201,7	201,3	202,0	203,1	202,7	202,6	203,9	204,6	205,8
71	205,9	206,3	206,2	206,7	208,9	212,4	215,4	217,7	224,3	225,8	225,8	224,4
72	228,7	234,9	241,7	243,4	244,6	243,9	246,3	245,1	245,3	243,3	244,4	252,3
73	254,5	260,7	270,6	277,5	280,0	278,4	276,8	279,5	288,1	285,1	278,6	277,0
74	276,6	285,2	292,4	293,9	292,9	290,1	287,9	290,4	299,3	300,9	337,4	343,5

(.) Estimaciones

Años	M E S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Oct.	Nv.	Do.
64		-0,2	-0,5	0,2	0,1	1,1	9,4	4,5	5,6	2,3	2,1	0,2
65	1,0	0,1	0,9	-0,3	1,1	0,5	0,7	1,2	0,1	-2,6	11,2	-13,3
66	0,7	-0,8	0,6	0,3	0,0	0,8	1,2	0,8	1,2	0,0	-0,5	-0,1
67	1,4	0,2	1,2	0,5	0,7	0,7	5,1	0,1	0,3	2,0	0,3	-1,1
68	2,9	-0,9	-1,5	-0,4	0,4	0,4	-1,0	0,5	0,0	0,8	1,0	1,2
69	-0,4	-2,7	-0,7	0,1	0,5	-0,5	-0,4	-2,0	-0,3	0,1	0,4	-1,0
70	0,5	-0,4	-0,2	0,1	1,3	-1,0	1,1	-0,4	-0,1	1,3	0,7	1,2
71	0,1	0,4	-0,1	0,5	2,2	3,5	3,0	2,3	6,6	1,5	0,0	-1,4
72	4,3	6,2	6,8	1,7	1,2	-0,8	2,5	-1,2	0,2	2,0	1,1	7,9
73	2,2	6,2	9,9	6,9	2,5	-1,6	-1,6	2,7	8,6	-3,0	-6,5	-1,6
74	-0,4	8,6	7,2	1,5	-1,0	-2,8	-2,2	2,5	8,9	1,6	36,5	6,1

Ab nos	M E S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64	71,1	71,2	71,4	71,6	71,8	72,8	74,5	75,7	76,5	77,8	79,2	80,0
65	81,1	82,5	83,1	83,1	83,5	83,7	84,3	84,6	85,8	86,2	86,9	87,3
66	87,6	87,6	87,6	87,8	89,2	89,9	90,2	90,3	90,3	90,8	91,3	91,9
67	92,5	93,2	93,6	94,1	94,5	94,4	95,0	96,3	96,9	97,2	98,0	97,8
68	98,7	98,8	99,8	100,1	100,3	100,6	99,8	99,8	100,2	100,4	100,6	100,3
69	101,1	100,4	101,0	101,5	102,3	101,1	102,6	102,3	103,0	102,9	103,7	104,1
70	104,6	104,9	105,7	106,3	105,6	106,8	108,5	109,7	110,2	111,3	111,6	111,4
71	113,1	113,0	114,2	115,4	116,1	116,6	116,6	116,8	118,2	119,5	121,1	122,7
72	122,3	122,9	123,9	123,9	124,5	124,8	126,5	127,8	129,6	129,9	130,7	131,1
73	132,7	133,7	134,0	135,9	137,9	140,0	141,5	143,8	146,3	147,0	148,8	150,4
74	151,3	153,7	151,1	158,5	160,5	161,2	163,1	165,8	168,4	169,4	174,9	177,3

Años	M E S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64		0,1	0,2	0,2	0,2	1,0	1,7	1,2	0,8	1,3	1,4	0,8
65	1,1	1,4	0,6	0,0	0,4	0,2	0,6	0,3	1,2	0,4	0,7	0,4
66	0,3	0,0	0,0	0,2	1,4	0,7	0,3	0,1	0,0	0,5	0,5	0,6
67	0,6	0,7	0,4	0,5	0,4	-0,1	0,6	1,3	0,6	0,3	0,8	-0,2
68	0,9	0,1	1,0	0,3	0,2	0,3	-0,8	0,0	0,4	0,2	0,2	0,7
69	-0,2	-0,7	0,6	0,5	0,8	-1,2	1,5	-0,3	0,7	-0,1	0,8	0,4
70	0,5	0,3	0,8	0,6	-0,7	1,2	1,7	1,2	0,5	1,1	0,3	-0,2
71	1,7	-0,5	1,2	1,2	0,7	0,5	0,0	0,2	1,4	1,3	1,6	1,6
72	0,1	0,1	1,0	0,0	0,6	0,3	1,7	1,3	1,8	0,3	0,8	1,0
73	1,0	1,0	0,3	1,9	2,0	2,1	1,5	2,3	2,5	0,7	1,8	1,6
74	0,9	2,4	1,4	3,4	2,0	0,7	1,9	2,7	2,6	1,0	5,3	2,6

Ano	M E S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Oc.	Nv.	Do.
64		-0,9	0,2	0,0	-0,3	1,7	2,8	1,3	1,3	2,0	1,9	1,5
65	1,5	1,0	1,1	-0,1	-0,1	-0,2	0,1	0,1	1,8	0,1	1,3	0,8
66	-0,2	-1,0	-0,1	0,7	1,6	0,7	-0,2	-0,5	-0,1	0,2	1,2	0,9
67	0,1	-0,2	0,5	0,2	-0,4	-0,4	-0,3	1,4	1,5	0,3	0,6	-0,3
68	0,6	0,1	1,6	0,3	0,7	0,4	-1,4	0,1	-0,5	0,2	0,6	1,1
69	1,2	1,4	0,8	0,6	1,5	2,4	2,1	-0,1	0,0	-0,2	-0,1	1,6
70	0,5	-1,2	1,1	-1,1	-0,4	1,6	1,2	3,0	-0,1	-0,4	-0,3	0,0
71	2,0	-0,9	1,7	1,9	0,6	0,6	-0,4	0,2	1,8	1,1	2,1	2,9
72	-1,6	0,6	0,0	-0,6	0,4	1,9	1,0	2,2	0,4	1,8	-0,7	1,4
73	1,4	0,5	0,1	2,5	2,7	3,7	0,7	3,7	1,6	3,5	-1,9	2,0
74	0,3	1,3	-0,3	3,9	1,7	2,1	0,3	4,3	0,4	2,0	7,1	1,6

C u a d r o : 6-13

Anos	M						E		S		E		S		Do.
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.				
64	298,6	301,5	308,4	313,8	319,6	321,7	324,6	330,7	335,5	341,8	337,2		346,8		
65	353,0	357,0	357,2	363,0	370,8	375,9	383,0	387,1	389,1	394,5	398,9		402,3		
66	408,6	409,7	413,2	416,1	419,2	422,3	430,5	433,1	437,9	440,4	446,1		451,1		
67	456,2	461,3	468,6	475,2	476,9	481,3	488,3	489,5	502,3	504,8	504,4		508,5		
68	512,0	514,7	518,5	524,4	532,0	539,0	539,2	545,3	554,4	558,8	564,3		572,7		
69	576,3	585,7	592,8	600,4	607,2	609,7	620,1	629,6	630,8	634,3	645,3		651,4		
70	658,6	666,2	661,4	654,0	653,7	656,5	663,8	666,6	672,8	679,0	680,4		687,3		
71	695,9	702,9	711,1	726,6	739,7	761,5	766,1	781,5	796,6	808,9	828,7		840,9		
72	855,6	867,8	890,3	908,9	999,1	941,8	957,0	973,4	991,4	1006,9	1026,8		1053,2		
73	1084,2	1104,8	1128,6	1142,8	1169,6	1197,5	1221,1	1226,9	1250,4	1269,1	1285,7		1304,1		
74	1327,4	1342,7	1370,4	1404,5	1409,6	1426,2	1443,1	1439,8	1450,7	1492,5	1497,1				

VARIABLE: ΔM

Cuadro: 6-14

Años	M E S S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Oc.	Nv.	Dc.
64		2,9	6,9	5,4	5,7	2,2	2,9	6,1	4,8	6,3	-4,6	9,6
65	6,2	4,0	0,2	5,8	7,8	5,1	7,1	4,1	2,0	5,4	4,4	3,4
66	6,3	1,1	3,5	2,9	3,1	3,1	8,2	2,6	4,8	2,5	5,7	5,0
67	5,1	5,1	7,3	6,6	1,7	4,4	7,0	1,2	12,8	2,5	-0,4	4,1
68	3,5	2,7	3,8	5,9	7,6	7,0	0,2	6,1	9,1	4,4	5,5	8,4
69	3,6	9,4	7,1	7,6	6,8	2,5	10,4	9,5	1,2	3,5	11,0	6,1
70	7,2	7,6	-4,8	-7,4	-0,7	3,2	7,3	2,8	6,2	6,2	1,4	6,9
71	8,6	7,0	8,2	15,5	13,1	21,8	4,6	15,4	15,1	12,3	19,8	12,2
72	14,7	12,2	-7,6	48,7	20,2	12,7	15,2	16,4	18,0	15,5	19,9	26,4
73	31,0	20,6	23,8	14,2	26,8	27,9	23,6	5,8	23,5	18,7	16,6	18,4
74	23,3	15,3	27,7	34,1	5,1	16,6	17,4	-3,8	10,9	41,8	4,6	39,1

VARIABLE: IPI

Cuadro: 6-15

Años	M						E						S					
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	De.						
64	127,8	126,9	118,7	124,5	124,1	123,8	121,3	108	122,7	128,2	134,4	139,2						
65	129,9	136,2	143,1	140,9	146,2	141,3	146,7	124	144	148,3	152,2	156,1						
66	154,6	155,5	167,6	162,1	167,1	166,4	158,1	140,4	169,3	174,9	173,2	181,4						
67	174,7	165	174,1	180,6	178,9	183,4	172,9	164,1	173,6	176	180,3	180,1						
68	180,3	183,1	186	184	192,4	186,3	179,2	150,4	184,8	199,1	200,3	209,2						
69	208,6	200,1	218,6	214,5	222,7	218,9	217,4	175,4	219,6	235,3	225,9	226,7						
70	234,5	237,9	234,4	251,9	240,9	246,6	243,5	183,8	241,2	249,7	249,8	239,3						
71	233,8	237,7	251,7	245,6	248,1	249,4	258,4	195,3	245,6	252,9	262,6	259,4						
72	266,4	274,3	290,8	280,6	289,1	298,2	280,9	221,9	292,5	299,8	311,7	302,8						
73	317,5	315,5	335,9	317,7	338	339,3	324,1	331,8	336,6	348,9	349,5	335,3						
74	371,1	359,7	381,0	372	380,1	382	354,2	381,4	350,7	374,9								

VARIABLE: Δ IPI

Cuadro: 6-16

Años	M E S											
	En	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Do.
64		-0,9	-8,20	5,8	-0,4	-0,3	-2,5	-13,3	14,7	5,5	6,2	4,8
65	-9,3	6,3	6,9	-2,2	5,3	-4,9	5,4	-22,7	20	4,3	3,9	3,9
66	-1,5	0,9	12,1	-5,5	5,0	-0,7	-8,3	-17,7	28,9	5,6	-1,7	8,2
67	-6,7	-9,7	9,1	6,5	-1,7	4,5	-10,5	-8,8	9,5	2,4	4,3	-0,2
68	0,1	2,9	2,9	-2	8,4	-6,1	-7,1	-28,8	34,4	14,3	1,2	8,9
69	-0,6	-8,5	18,5	-4,1	8,2	-3,8	-1,5	-42	44,2	15,7	-9,4	0,8
70	7,8	3,4	-3,5	17,5	-11,0	5,7	-3,1	-61,7	57,4	8,5	0,1	-10,5
71	-5,5	3,9	14,0	-6,1	2,5	1,3	9,0	-63,1	50,3	7,3	9,7	-3,2
72	7,0	-2,1	16,5	-10,2	8,5	9,1	-17,3	-59,0	70,6	7,3	11,9	-8,9
73	14,7	-2,0	20,4	-18,2	20,3	1,3	-15,2	7,7	4,8	12,3	0,6	-14,2
74	35,8	-11,4	21,3	-9,0	8,1	1,9	-27,8	27,2	-30,7	24,2		

VARIABLE: A

Cuadro: 6-17

Ano	M E S E S E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64	265,9	261,0	276,3	276,7	248,1	271,4	273,8	264,2	263,0	245,1	247,2	257,6
65	280,5	283,5	282,0	264,7	297,4	299,1	312,2	303,3	302,9	305,1	273,9	311,1
66	311,9	283,8	317,1	300,4	293,2	310,3	301,5	339,3	324,3	361,0	363,0	348,6
67	350,2	355,2	359,0	372,7	355,3	352,9	340,4	351,7	351,6	355,1	365,1	400,3
68	381,6	388,6	380,8	387,0	410,5	389,5	407,1	417,8	435,9	443,1	446,1	447,1
69	469,5	492,1	477,0	496,2	465,0	492,9	498,0	419,9	525,9	540,5	525,1	547,9
70	581,1	591,3	598,7	602,5	624,3	641,7	611,0	608,7	608,1	608,0	663,9	639,2
71	635,5	591,7	554,7	548,2	649,3	694,7	679,5	684,1	658,4	674,8	692,0	706,4
72	745,0	751,1	742,8	731,2	755,9	800,6	760,4	778,4	827,0	835,4	883,3	908,2
73	920,1	904,7	948,7	851,6	891,2	876,5	843,8	839,3	831,7	833,5	919,1	927,3
74	868,6	910,6	957,6	892,2	964,8	958,0	960,3	978,0	1026,0	1031,5	979,7	

VARIABLE: A

Cuadro: 6-18

Anos	M E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64		-4,9	15,3	0,4	-28,6	23,3	2,4	-9,6	-1,2	-17,9	2,1	10,4
65	22,9	3,0	-1,5	-17,3	32,7	1,7	13,1	-8,9	-0,4	2,2	-31,2	37,2
66	0,8	-28,1	33,3	-16,7	-7,2	17,1	-8,8	37,8	-15,0	36,7	2,0	-14,4
67	1,6	5,0	3,8	13,7	-17,4	-2,4	-12,6	11,4	-0,1	3,5	10,0	35,2
68	-18,7	7,0	-7,8	6,2	23,5	-21,0	17,6	10,7	18,0	8,7	2,8	0,8
69	22,5	-77,4	70,7	33,7	-30,7	27,4	5,0	20,8	6,8	13,5	-15,4	23,0
70	33,1	10,0	7,5	0,3	23,4	17,6	-30,7	-0,5	21,2	-24,4	56,3	-24,4
71	-3,8	-41,9	-39,8	-6,6	96,9	48,9	15,2	15,3	-26,2	32,5	-8,0	15,3
72	38,7	0,8	-23,5	22,3	-5,6	61,3	-40,3	30,9	44,8	33,0	-6,1	44,7
73	11,9	-22,0	21,4	-55,6	0,8	14,5	-35,6	22,0	-18,7	22,6	49,5	-91,9
74	41,3	35,8	19,1	-30,0	45,7	18,9	2,3	35,2	44,6	34,3	127,3	16,1

Artos	M			E			S			E			S			Do.
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.					
64	2087,3	2102,1	1971,7	2109,1	2006,5	2109,2	2103,0	2093,3	2180,0	2242,1	2211,0	2248,4				
65	2219,7	2288,2	2263,1	2239,6	2313,1	2354,1	2456,0	2429,9	2427,1	2428,2	2456,1	2507,8				
66	2522,4	2480,4	2631,9	2602,1	2662,5	2656,2	2652,8	2791,4	2814,5	2766,1	2916,3	2901,6				
67	2927,7	2879,0	2755,6	3032,2	2961,6	3042,1	3002,3	3068,7	3129,4	3136,3	3151,6	3204,0				
68	3233,5	3349,1	3248,3	3205,8	3347,3	3306,7	3428,7	3435,6	3459,7	3592,2	3591,1	3551,6				
69	3642,8	3731,4	3708,4	3697,9	3749,0	3753,9	3870,9	3962,0	3842,2	4014,0	4067,7	4142,2				
70	4064,9	4066,1	4077,2	4291,1	4118,5	4269,9	4299,1	4308,3	4461,2	4473,4	4343,9	4513,1				
71	4559,4	4376,0	4627,5	4555,6	4686,8	4722,4	4699,9	4651,8	4750,4	4621,8	4905,9	4899,1				
72	4890,2	5277,1	5111,7	5070,5	5206,5	5211,4	5075,8	5258,1	5322,9	5336,4	5403,0	5329,0				
73	5532,4	5618,7	5558,4	5455,8	5797,8	5678,4	5669,7	5901,8	6020,0	6063,3	6110,4	5953,1				
74	6162,6	6306,2	6192,9	6027,2	6142,1	5971,2	6137,8	6192,4	6350,4	6646,3	6452,7	6179,9				

Años	M				E				S			
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64	-	14,8	-130,4	137,4	-102,6	102,8	-6,2	-9,7	86,7	62,1	31,1	37,4
65	28,7	68,5	-25,1	-23,5	73,7	40,8	101,9	-26,1	-2,8	1,1	27,9	51,7
66	14,6	-42,0	151,5	-29,8	60,4	-6,3	-3,4	138,6	23,1	-48,4	150,2	-14,7
67	26,1	-48,7	-123,4	276,6	-70,6	80,5	-39,8	66,4	60,7	6,9	15,3	52,5
68	29,5	-15,6	-100,8	-42,5	141,5	-40,6	122,0	6,9	24,1	132,5	-1,1	-39,5
69	91,2	88,6	-23,0	-10,5	51,5	4,9	117,0	91,1	-79,8	131,8	53,7	74,4
70	77,2	1,2	11,0	213,7	-172,9	151,2	30,0	9,4	153,7	13,5	-133,4	168,9
71	46,6	-183,4	249,5	-52,3	95,7	43,8	15,5	-65,2	82,3	107,2	273,0	-7,6
72	23,2	362,1	-151,0	-2,6	90,8	35,9	-73,8	135,6	36,2	40,1	70,2	-73,4
73	178,3	74,2	-40,4	-84,8	294,1	-91,5	52,2	179,9	98,3	88,9	28,1	-187,9
74	168,9	144,7	-136,9	-57,0	69,2	-112,2	215,0	27,4	108,1	305,9	-23,7	-496,7

VARIABLE: CA

Cuadro: 6-21

Años	M E S											
	En.	Fb.	Mr.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64	653,7	663,3	626,1	694,1	658,7	687,2	706,1	702,5	707,3	710,3	719,5	759,4
65	736,9	741,8	780,5	779,6	762,8	807,4	877,2	815,9	821,6	802,2	854,5	894,1
66	860,9	899,9	1011,7	971,1	967,5	957,8	951,8	1011,3	1004,6	990,1	1041,7	1061,1
67	1030,5	1047,0	1089,6	1139,8	1064,4	1108,9	1007,9	1066,8	1140,1	1106,8	1108,2	1087,3
68	1195,5	1205,0	1168,1	1191,1	1255,5	1618,9	1282,6	1280,3	1218,2	1344,8	1296,2	1307,7
69	1340,2	1277,6	1305,1	1319,2	1379,6	1286,9	1320,1	1356,6	1381,1	1370,2	1265,9	1329,3
70	1346,1	1395,2	1332,4	1603,5	1315,6	1362,6	1380,8	1301,7	1379,4	1379,5	1405,6	1376,2
71	1330,8	1404,5	1435,7	1381,5	1323,8	1401,2	1498,5	1424,2	1430,7	1440,3	1509,0	1579,9
72	1493,3	1532,1	1609,4	1636,9	1643,3	1615,7	1541,1	1718,6	1694,4	1626,9	1726,3	1724,4
73	1827,4	1829,3	1981,6	1990,7	1919,5	1822,4	1780,9	1829,2	1774,4	1841,2	1934,2	2168,9
74	2165,3	1878,8	1924,7	2022,6	2098,7	1884,7	1945,6	1982,3	1943,9	2057,1	1977,2	

V A R I A B L E : Δ C A C u a d r o : 6-22

Años	M. E. S. E. S.											
	En.	Feb.	Mar.	Ab.	Ma.	Jn.	Jl.	Ag.	Sp.	Ot.	Nv.	Dc.
64		9,6	-37,2	68,0	-35,4	28,5	18,9	-3,6	4,8	3,0	9,2	39,9
65	-22,5	4,9	38,7	-0,9	-16,8	44,6	69,8	-61,3	5,7	-19,4	52,3	39,6
66	-33,2	38,9	111,9	-40,5	-3,6	-9,7	-6,0	59,5	-6,7	-14,5	51,6	19,4
67	-30,6	16,5	42,6	50,2	-75,4	44,5	-101,0	58,9	73,3	-33,3	1,4	-20,9
68	108,2	9,5	-36,9	22,9	64,5	363,4	-336,3	-2,4	-61,9	126,5	-48,6	11,5
69	32,5	-62,6	27,5	14,2	60,0	-92,5	33,3	36,5	24,2	-10,8	-104,3	63,5
70	16,7	49,1	-62,5	271,0	-287,6	52,9	12,5	-77,2	77,5	5,5	22,1	-34,3
71	-49,3	76,0	-11,3	1,5	-79,6	105,6	94,0	-84,7	8,4	22,4	51,7	72,0
72	-88,4	26,3	49,4	67,7	-7,9	6,6	-79,2	168,2	-26,2	-56,4	84,1	15,0
73	102,5	-27,1	112,9	-38,7	109,5	-57,1	-47,0	46,8	-57,5	86,7	62,3	-71,2
74	289,9	-261,0	-20,3	149,5	9,0	-157,9	47,7	12,8	-23,9	118,5	-51,7	3,9

V A R I A B L E : F U N C I O N D E A U T O C O R R E L A C I O N

C u a d r o 6 - 23

	IPM	IPAT	IPPA	IPAI	ICV	ICVA	M	IPI	A	EE	CA
$r(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$r(1)$	0,998	0,997	0,991	0,993	0,999	0,998	0,999	0,983	0,991	0,996	0,972
$r(2)$	0,997	0,994	0,983	0,985	0,999	0,997	0,999	0,984	0,987	0,995	0,970
$r(3)$	0,996	0,991	0,977	0,980	0,998	0,995	0,999	0,984	0,985	0,996	0,969
$r(4)$	0,995	0,988	0,971	0,975	0,997	0,993	0,998	0,977	0,983	0,995	0,967
$r(5)$	0,993	0,986	0,966	0,973	0,996	0,992	0,998	0,982	0,981	0,995	0,967
$r(6)$	0,991	0,982	0,957	0,972	0,996	0,991	0,997	0,976	0,979	0,995	0,960
$r(7)$	0,989	0,978	0,950	0,970	0,995	0,990	0,997	0,976	0,977	0,994	0,959
$r(8)$	0,987	0,974	0,943	0,967	0,994	0,989	0,996	0,972	0,975	0,996	0,957
$r(9)$	0,985	0,972	0,937	0,963	0,993	0,987	0,996	0,971	0,971	0,995	0,960
$r(10)$	0,982	0,968	0,931	0,957	0,991	0,986	0,995	0,966	0,969	0,994	0,952

	ΔIPM	$\Delta IPAT$	$\Delta IPPA$	$\Delta IPAI$	ΔIPV	$\Delta ICVA$	ΔM	ΔIPT	ΔA	ΔEE	ΔCA
$r(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$r(1)$	0,241	0,096	0,091	0,142	0,390	0,111	0,379	-0,553	-0,258	-0,366	-0,457
$r(2)$	0,21	0,117	-0,048	0,190	0,440	0,270	0,460	0,068	-0,088	-0,178	-0,018
$r(3)$	0,405	0,157	-0,022	-0,007	0,418	0,079	0,553	0,155	0,025	0,188	-0,022
$r(4)$	0,359	0,180	0,035	-0,112	0,418	0,188	0,409	-0,302	-0,090	-0,164	0,038
$r(5)$	0,318	0,181	0,217	-0,024	0,316	0,007	0,466	0,278	0,043	-0,049	0,071
$r(6)$	0,398	0,164	-0,054	0,066	0,347	0,180	0,564	-0,137	-0,075	0,170	-0,085
$r(7)$	0,249	0,027	0,011	0,012	0,540	0,169	0,454	0,115	0,056	-0,338	0,004
$r(8)$	0,269	0,0001	0,002	0,100	0,427	0,340	0,530	-0,082	0,107	0,229	-0,061
$r(9)$	0,342	0,198	0,012	0,160	0,461	-0,005	0,517	0,088	-0,151	0,240	0,144
$r(10)$	0,260	0,053	0,070	0,001	0,301	0,208	0,470	-0,040	-0,142	-0,357	-0,069
$r(11)$	0,325	0,218	0,126	-0,024	0,360	0,041	0,455	-0,027	0,166	0,118	0,005
$r(12)$	0,183	-0,042	-0,065	-0,028	0,291	0,082	0,432	0,067	-0,105	0,040	0,035
$r(13)$	0,205	0,020	-0,055	-0,031	0,190	0,092	0,470	-0,145	0,022	0,053	-0,143
$r(14)$	0,242	0,081	0,060	0,200	0,363	0,211	0,382	0,202	0,010	0,028	0,179
$r(15)$	0,252	0,267	0,025	0,049	0,398	0,232	0,44	-0,141	-0,097	0,019	-0,029
$r(16)$	0,192	0,052	0,147	-0,055	0,323	0,265	0,329	-0,030	0,050	-0,299	-0,031
$r(17)$	0,128	0,159	0,087	-0,132	0,182	0,070	0,421	0,091	0,206	0,231	-0,041
$r(18)$	0,201	0,042	-0,039	0,129	0,268	0,183	0,343	-0,002	-0,250	0,056	0,050
$r(19)$	0,079	0,072	0,059	0,197	0,153	-0,002	0,393	0,033	0,186	-0,274	-0,081
$r(20)$	0,138	0,176	0,008	0,310	0,246	0,113	0,301	-0,068	-0,057	0,214	0,099
$r(21)$	0,250	0,138	0,102	0,155	0,139	0,052	0,425	0,089	0,105	0,013	-0,126
$r(22)$	0,066	-0,030	-0,012	0,014	0,146	0,158	0,340	-0,203	-0,042	-0,108	0,153

V A R I A B L E S: COEFICIENTES DE AUTOCORRELACION PARCIAL

C u a d r o 6 - 25

	Δ IPM	Δ IPAT	Δ IPPA	Δ IPAI	Δ ICV	Δ ICVA	Δ M	Δ PI	Δ A	Δ EE	Δ CA
f _{1,1}	0,241	0,096	-0,091	0,142	0,390	0,111	0,379	-0,553	-0,258	-0,366	-0,457
f _{2,2}	0,161	0,109	-0,057	0,173	0,340	0,261	0,369	-0,343	0,166	-0,360	-0,287
f _{3,3}	0,353	0,139	-0,032	-0,007	0,231	0,030	0,409	0,026	0,051	-0,043	-0,226
f _{4,4}	0,244	0,150	0,027	-0,152	0,182	0,118	0,131	-0,395	-0,058	-0,201	-0,127
f _{5,5}	0,191	0,138	0,223	-0,061	0,006	-0,047	0,228	-0,429	0,007	-0,205	0,034
f _{6,6}	0,238	0,102	-0,007	0,006	0,064	0,118	0,269	0,085	-0,055	0,126	-0,018
f _{7,7}	0,006	-0,065	0,028	0,024	0,372	-0,161	0,119	0,133	0,023	0,503	-0,029
f _{8,8}	-0,022	-0,088	0,002	0,07	0,161	0,268	0,170	-0,068	0,089	0,370	-0,104
f _{9,9}	0,048	0,121	-0,003	0,131	0,159	-0,207	0,252	-0,049	-0,109	0,353	0,059
f _{10,10}	-0,017	-0,042	0,027	-0,064	-0,147	-0,312	0,119	0,311	-0,243	-0,181	0,037

f	Δ_{IPM}	Δ_{IPAT}	Δ_{IPPA}	Δ_{IPAI}	Δ_{ICV}	Δ_{ICVA}	Δ_M	Δ_{IPI}	Δ_A	Δ_{EE}	Δ_{CA}
	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$	$\varepsilon(f)$
0	7,43	7,97	6,19	9,966	1,54	1,69	227,79	7,41	57,69	523,6	140,6
0,031	3,93	5,29	4,87	8,402	0,81	1,0	107,41	6,24	100,21	481,3	137,4
0,063	0,73	3,04	4,12	7,538	0,17	0,498	9,08	2,67	127,23	921,1	257,7
0,094	0,48	2,34	4,25	8,661	0,17	0,510	11,00	7,28	136,20	2042,1	430,7
0,125	0,55	2,14	4,38	9,454	0,23	0,654	15,68	16,16	198,81	2471,3	594,2
0,156	0,65	2,38	5,70	7,069	0,14	0,487	13,63	23,36	267,98	2295,6	767,3
0,188	1,05	3,78	9,01	5,063	0,08	0,282	10,18	24,88	224,06	1825,2	1718,5
0,219	1,16	3,82	9,24	5,051	0,10	0,297	10,18	28,66	210,65	4271,6	2848,8
0,250	1,06	3,16	7,71	3,579	0,18	0,451	10,43	25,40	356,96	4982,4	2883,9
0,281	1,24	3,17	6,61	3,372	0,20	0,531	13,63	36,83	394,78	3121,9	2664,0
0,313	1,46	3,38	4,68	4,340	0,14	0,37	21,64	62,66	267,30	5729	2817,1
0,344	1,54	3,78	5,29	5,994	0,12	0,305	27,41	109,29	362,23	11466,0	3732,1
0,375	1,13	2,89	8,27	5,421	0,09	0,452	25,21	138,38	526,85	9816,17	3503,6
0,406	0,66	2,18	8,92	4,979	0,13	0,448	17,99	167,23	427,44	3262,72	4427,6
0,438	0,74	2,94	8,46	5,538	0,19	0,368	14,18	149,26	395,59	3309,91	5525,8
0,469	0,87	3,31	6,35	5,539	0,15	0,702	17,47	62,06	340,89	5107,85	4420,8
0,500	0,77	2,28	5,50	5,736	0,11	1,035	17,29	32,11	264,19	4608,79	3908,9

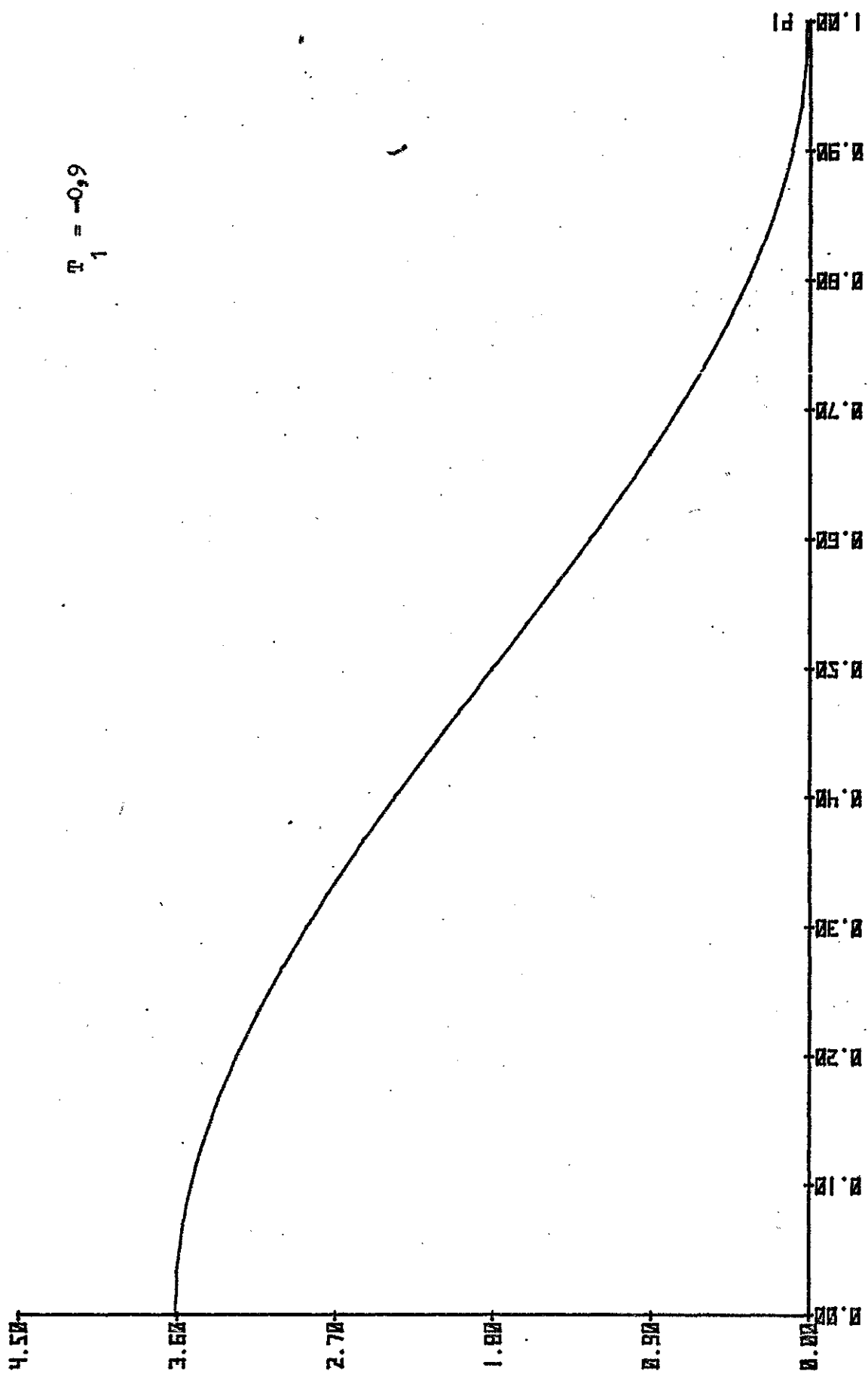


Gráfico 3-1

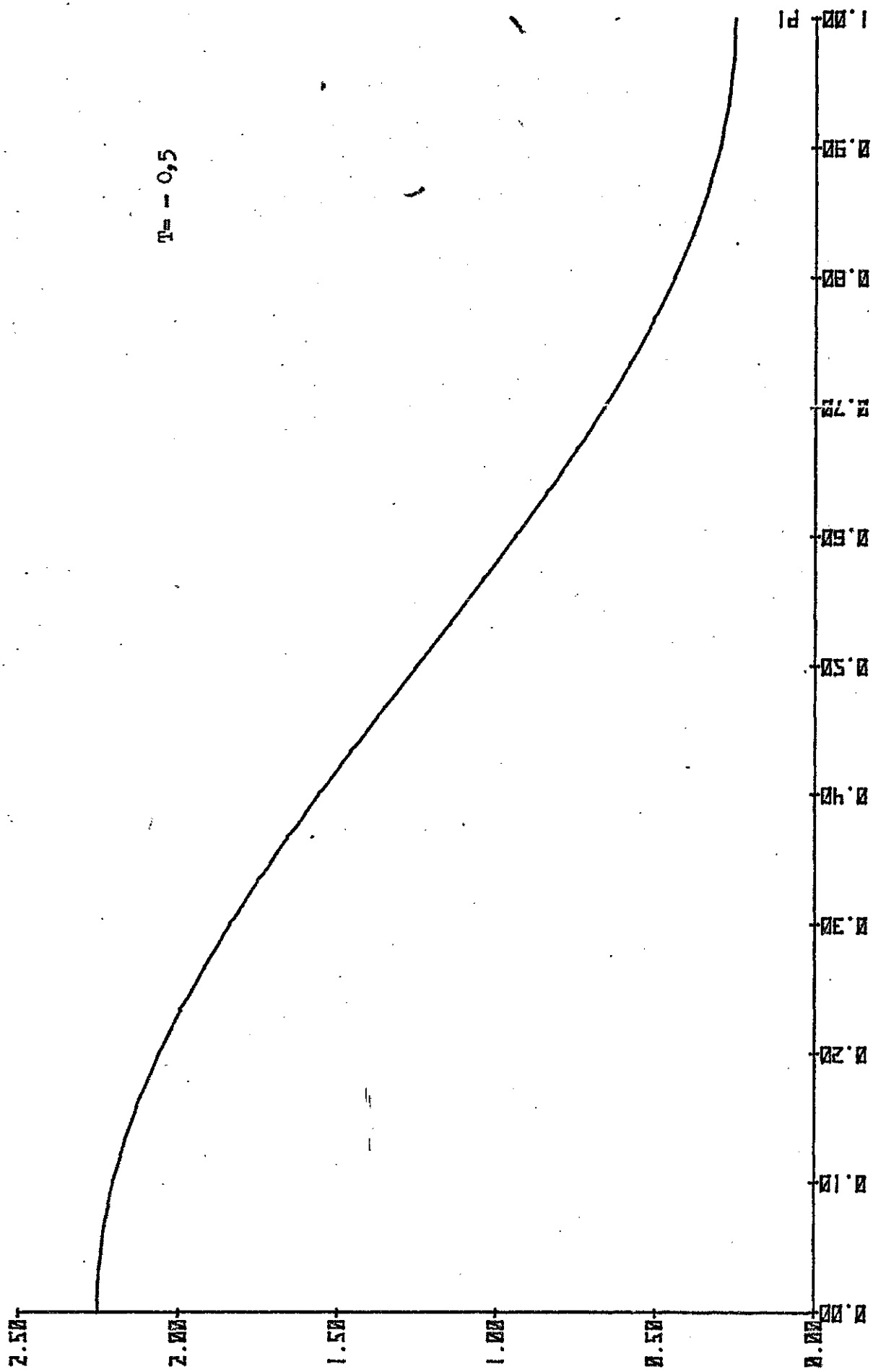
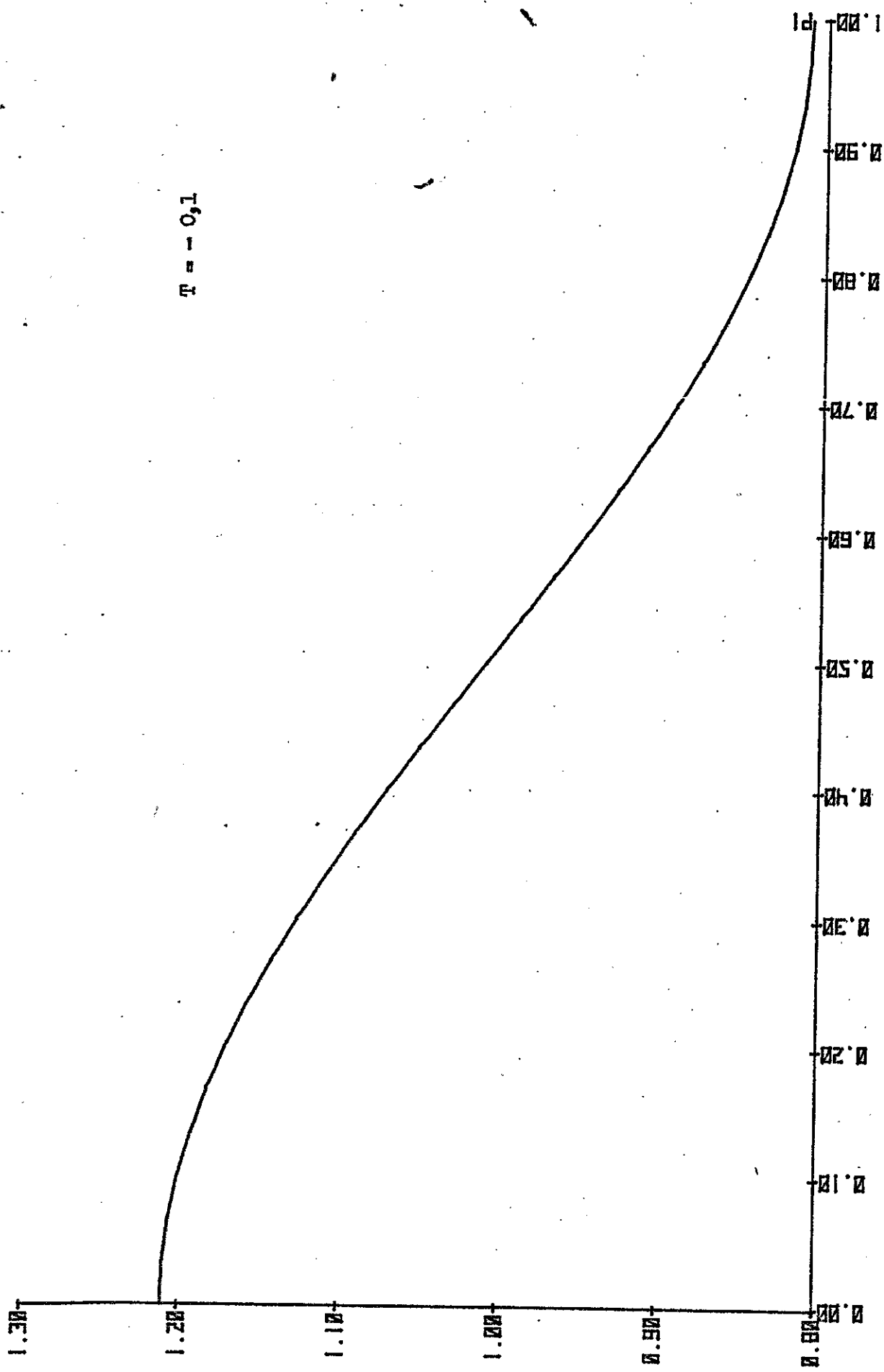


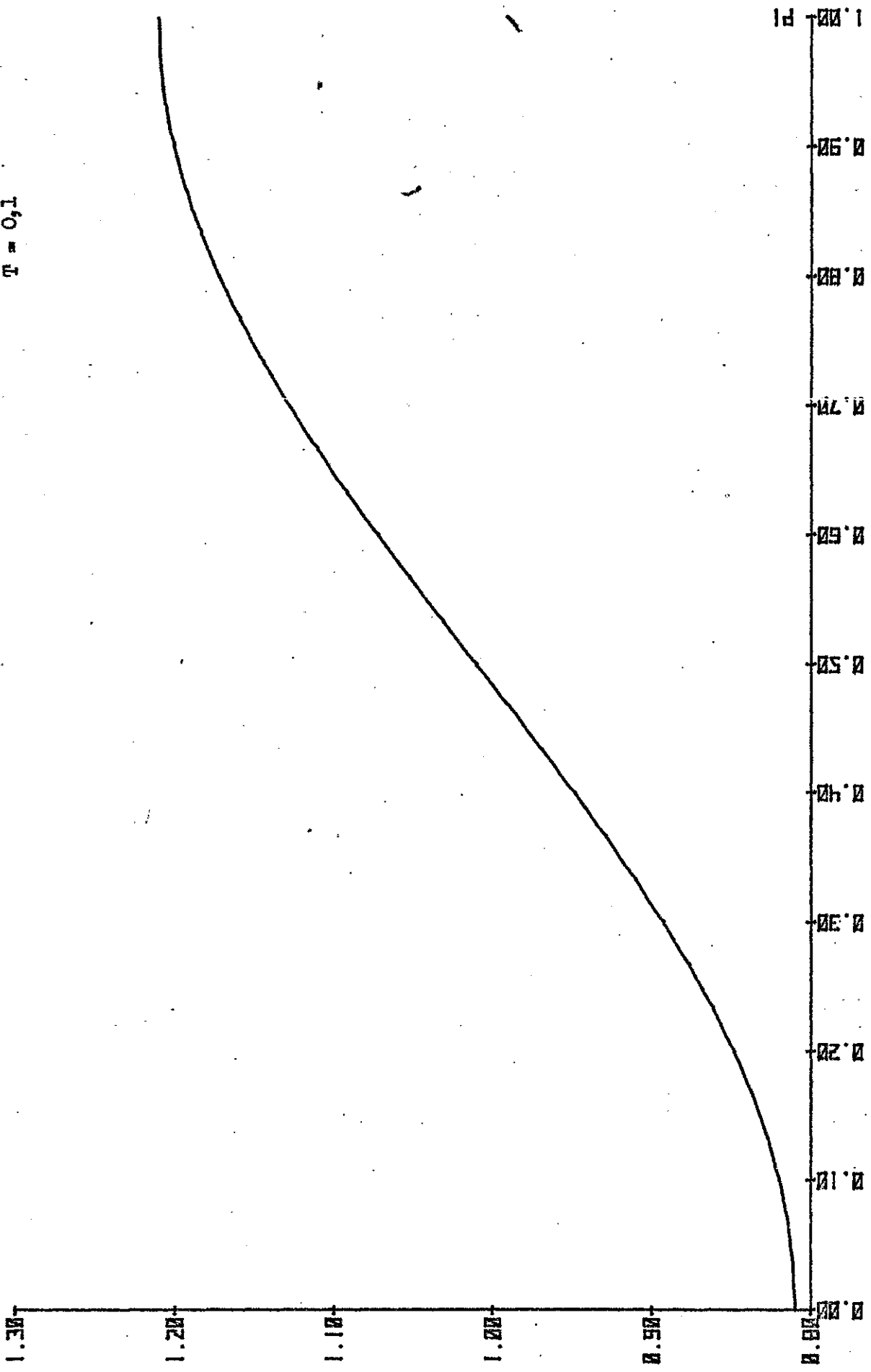
Gráfico 3-2



$T = -0.1$

Gráfico 3-3

Gráfico 3-1



$T = 0.1$

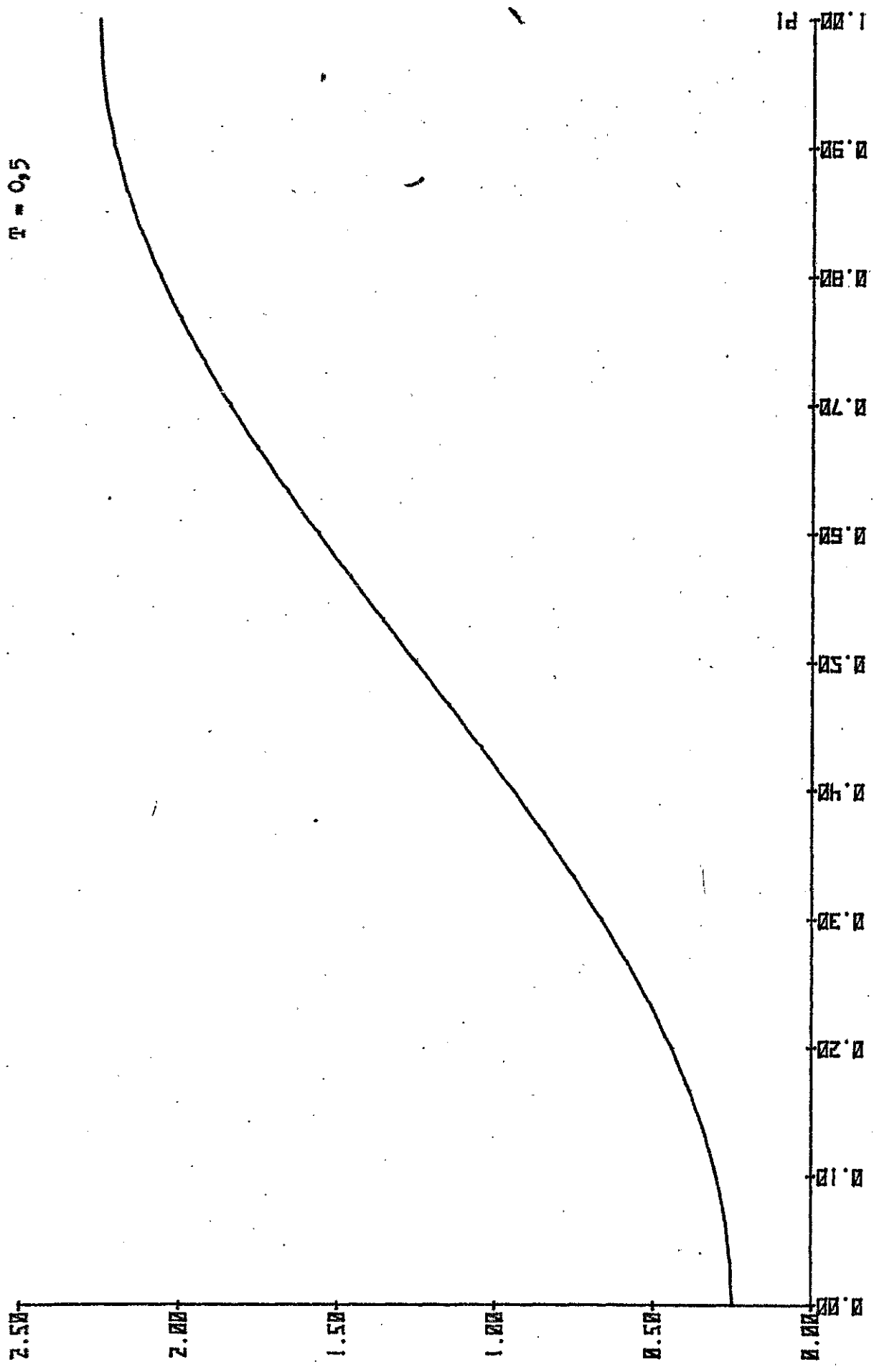
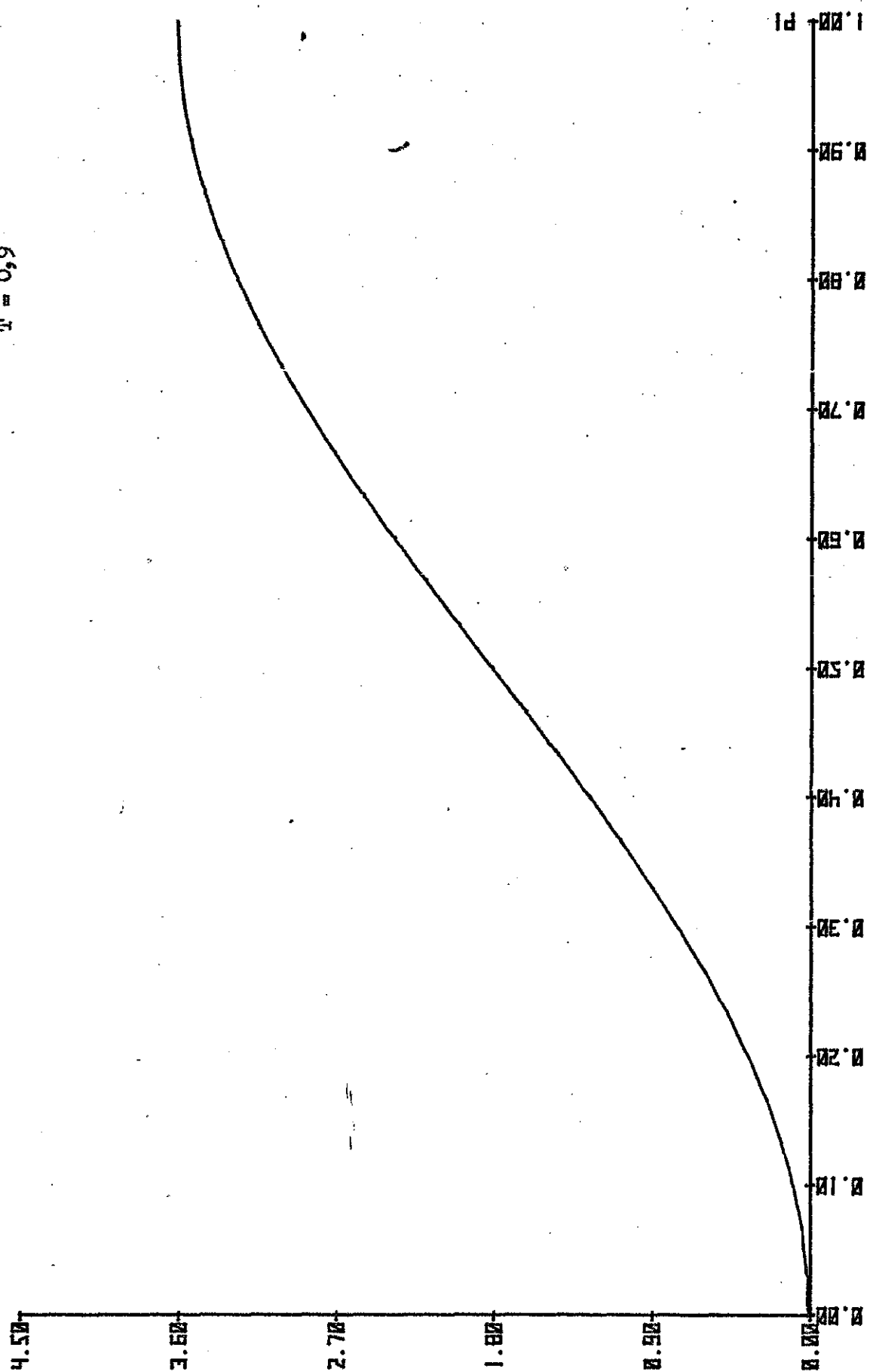
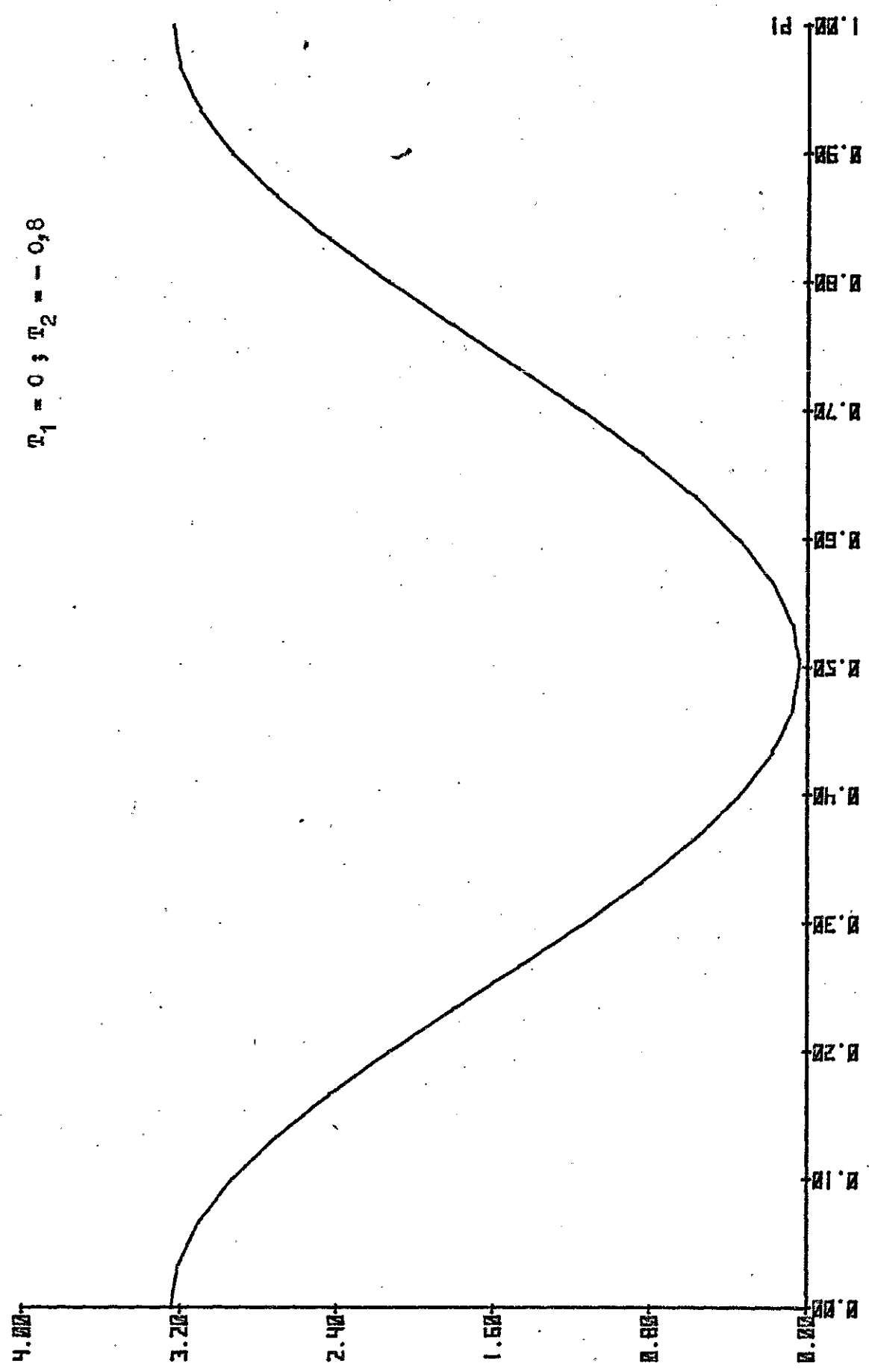


Gráfico 3-5



Graticulo 3-7



$x_1 = 0 ; x_2 = -0.8$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -0,4$$

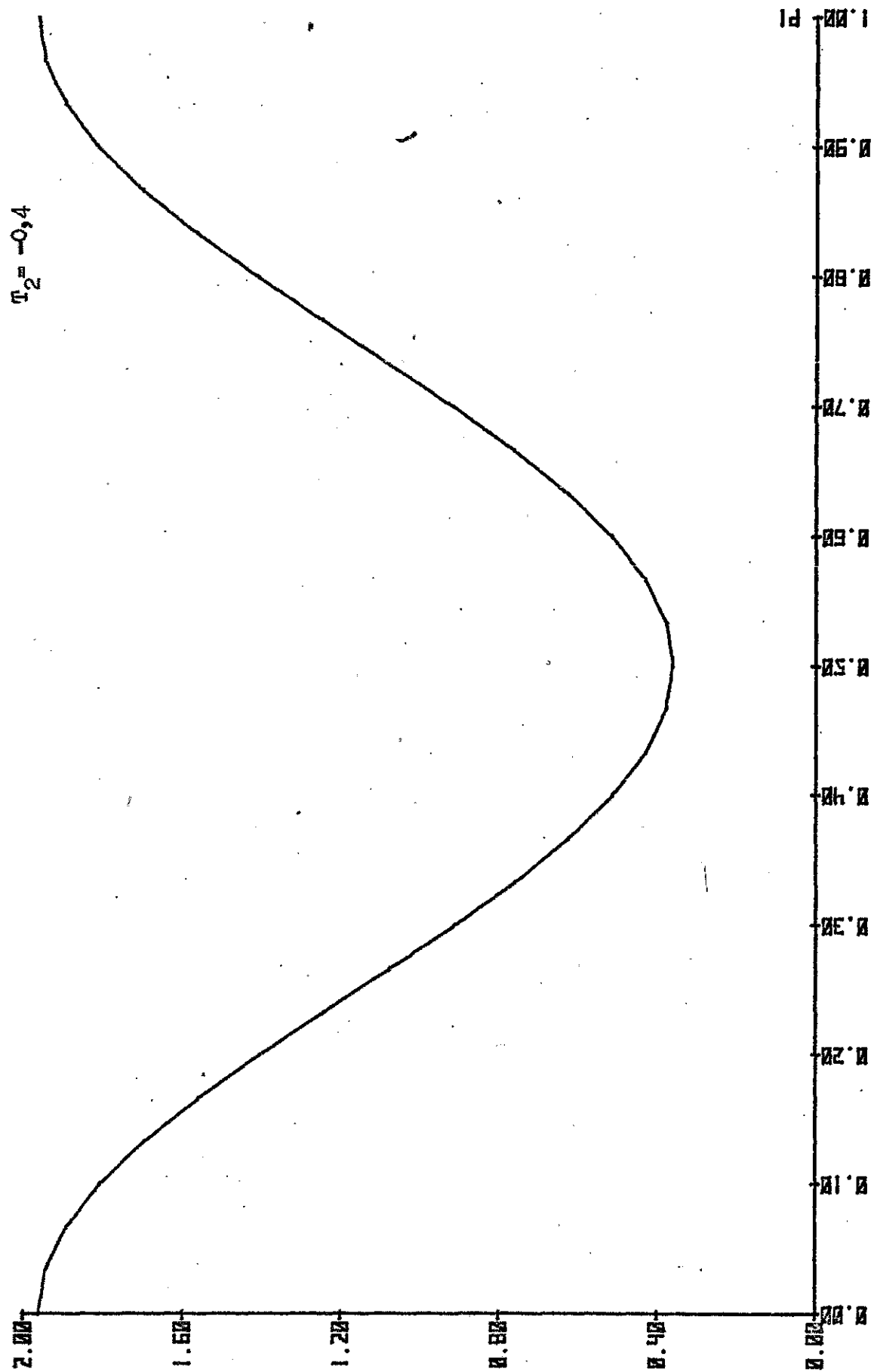
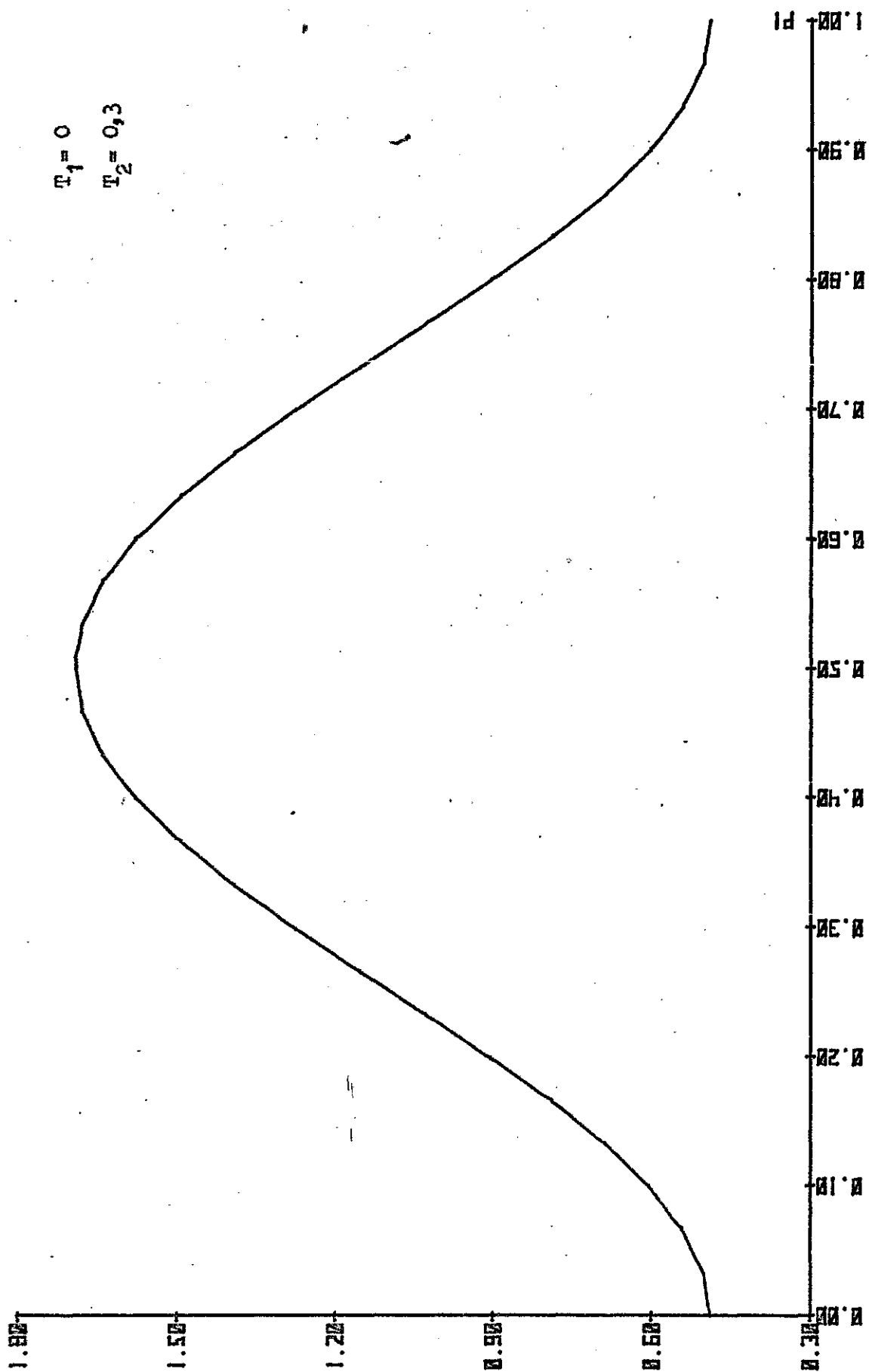
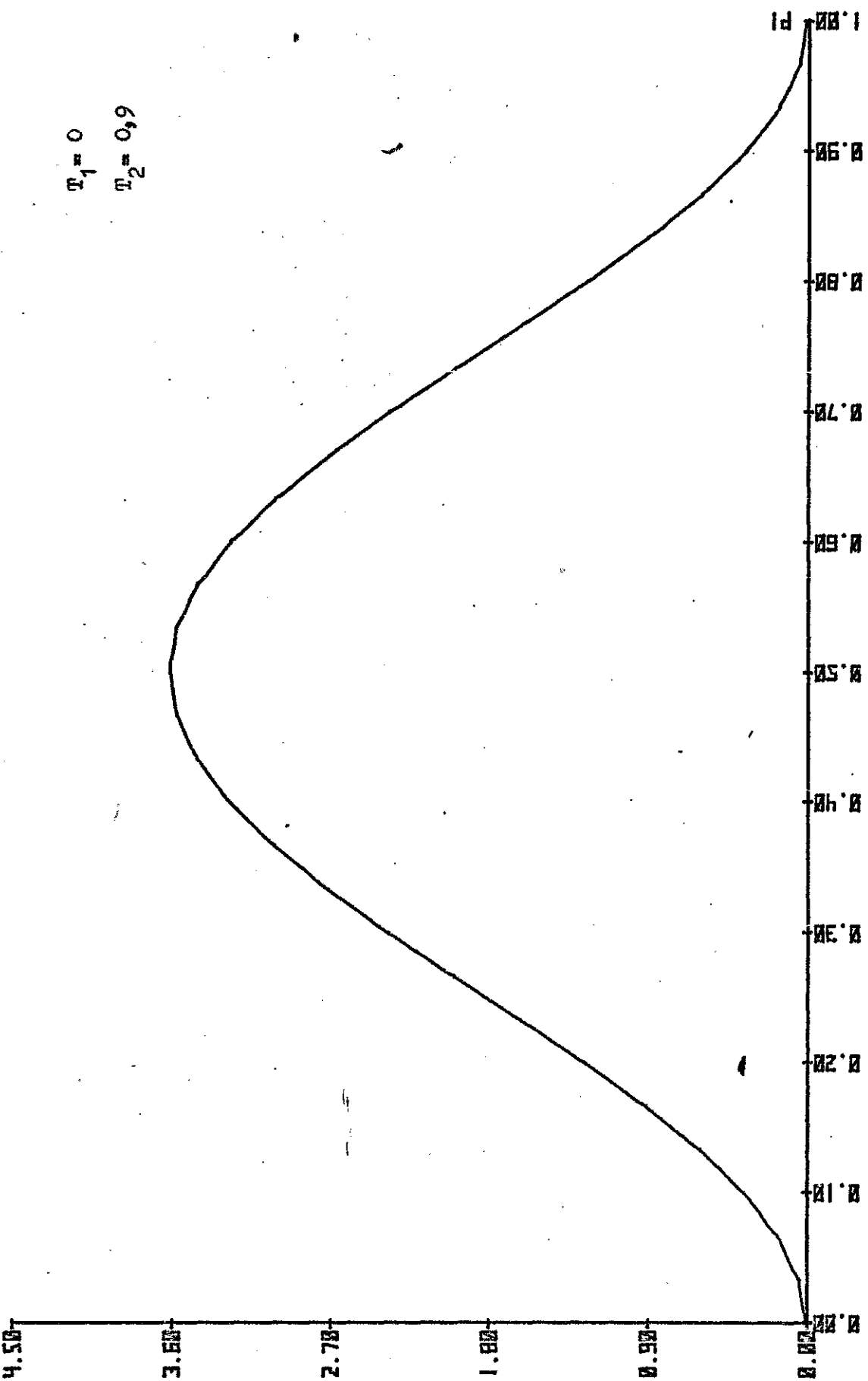


Gráfico 3-8



$x_1 = 0$
 $x_2 = 0.3$



$x_1 = 0$
 $x_2 = 0,9$

Gráfico 3-10

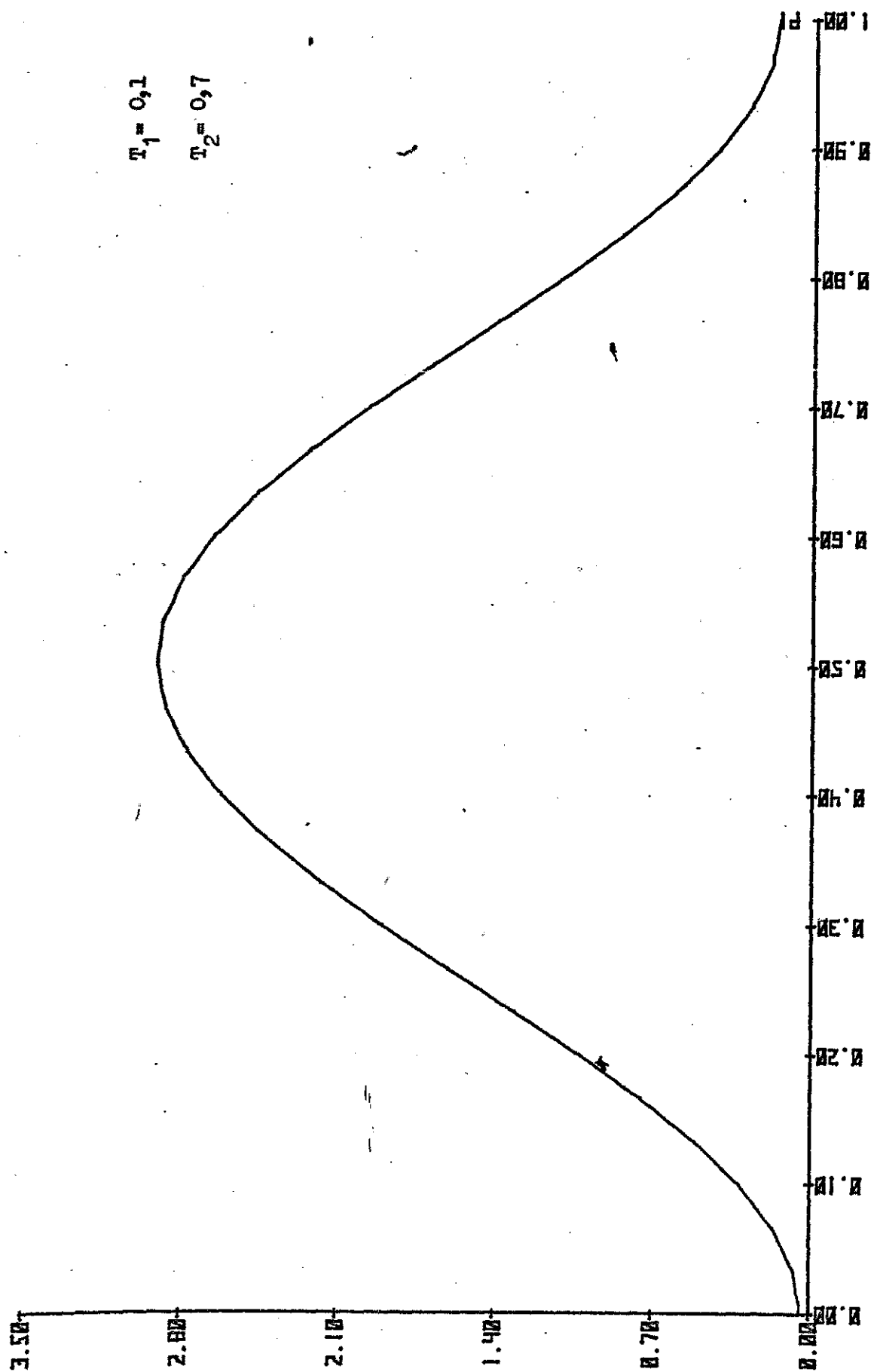
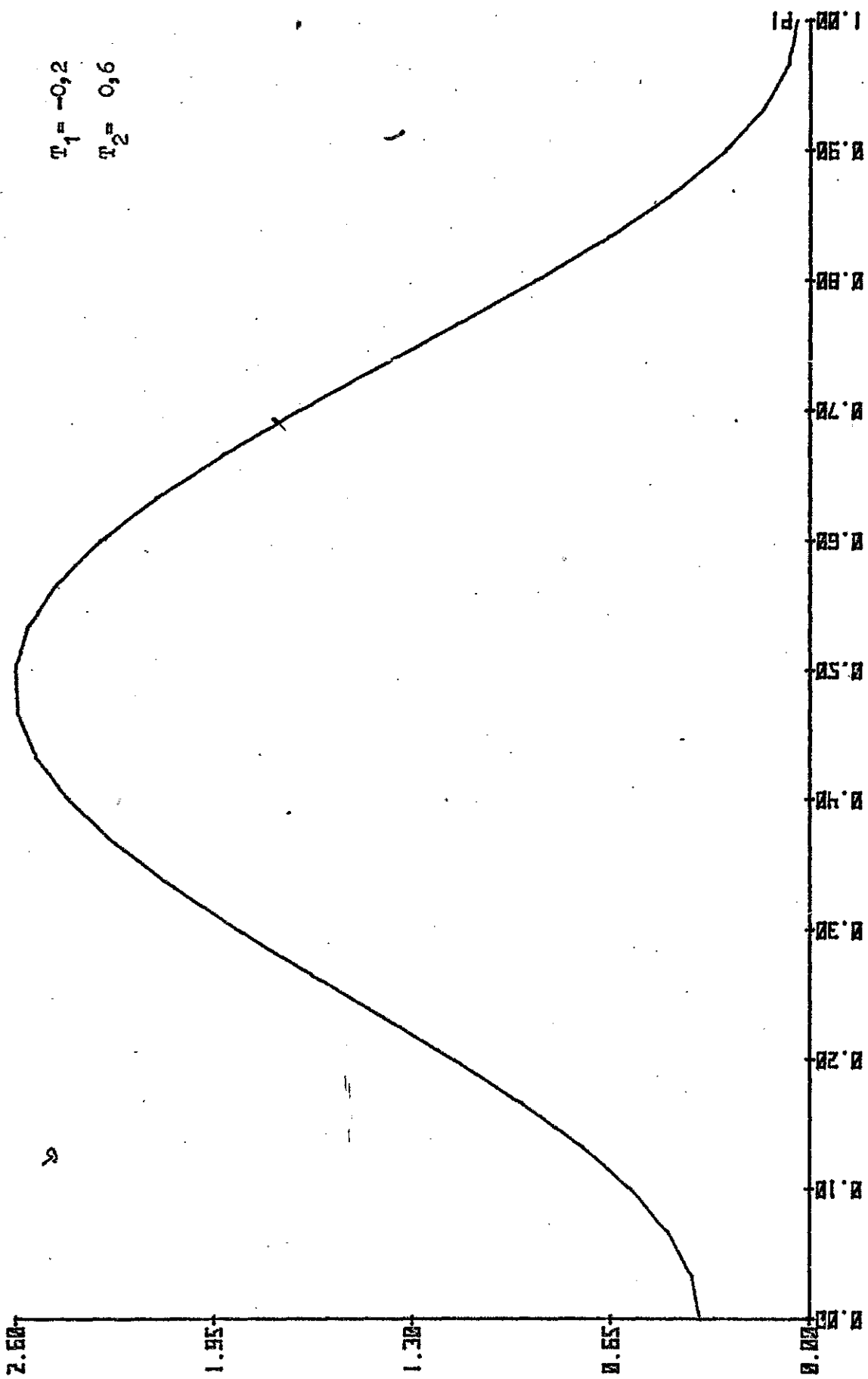


Gráfico 3- II

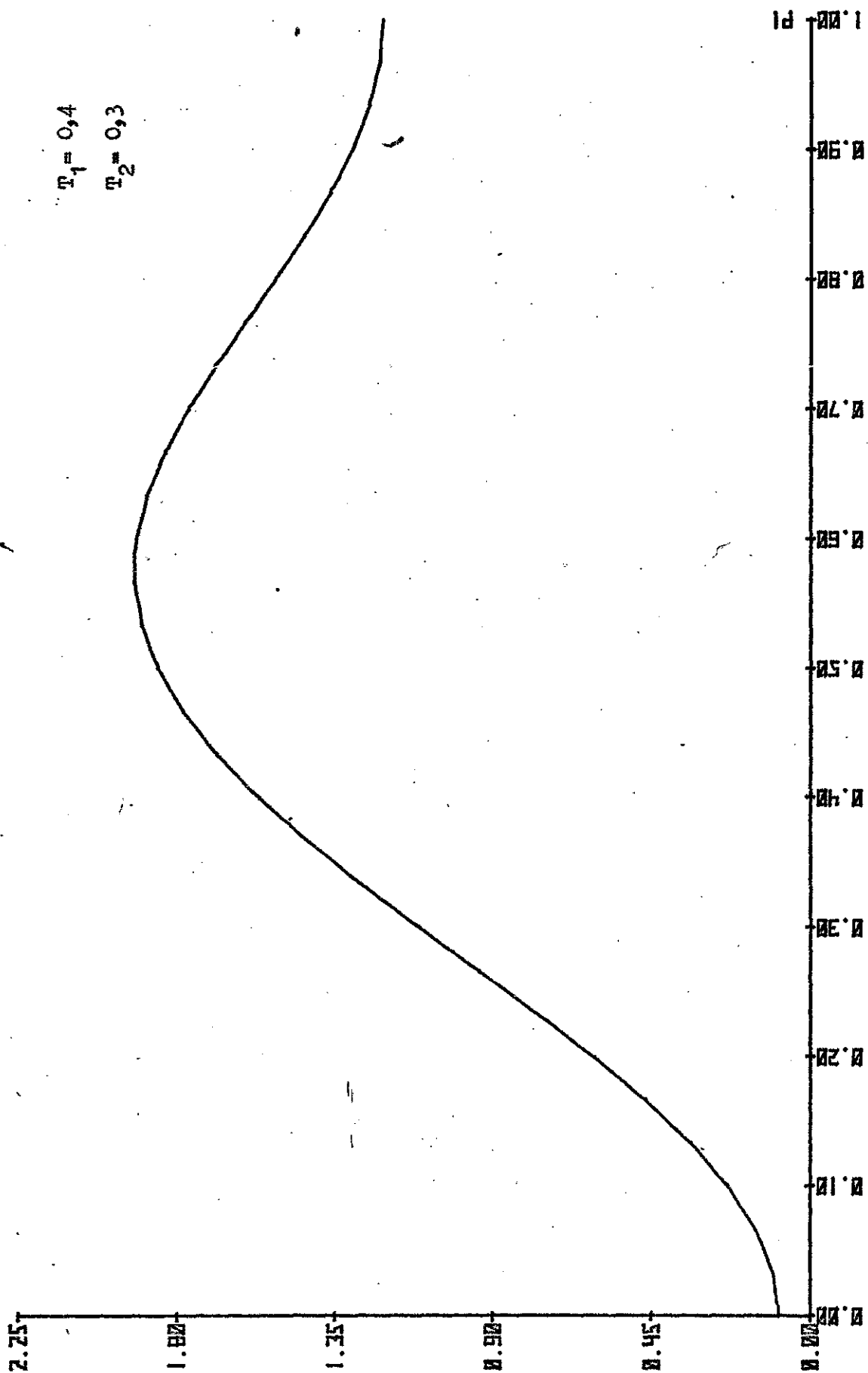


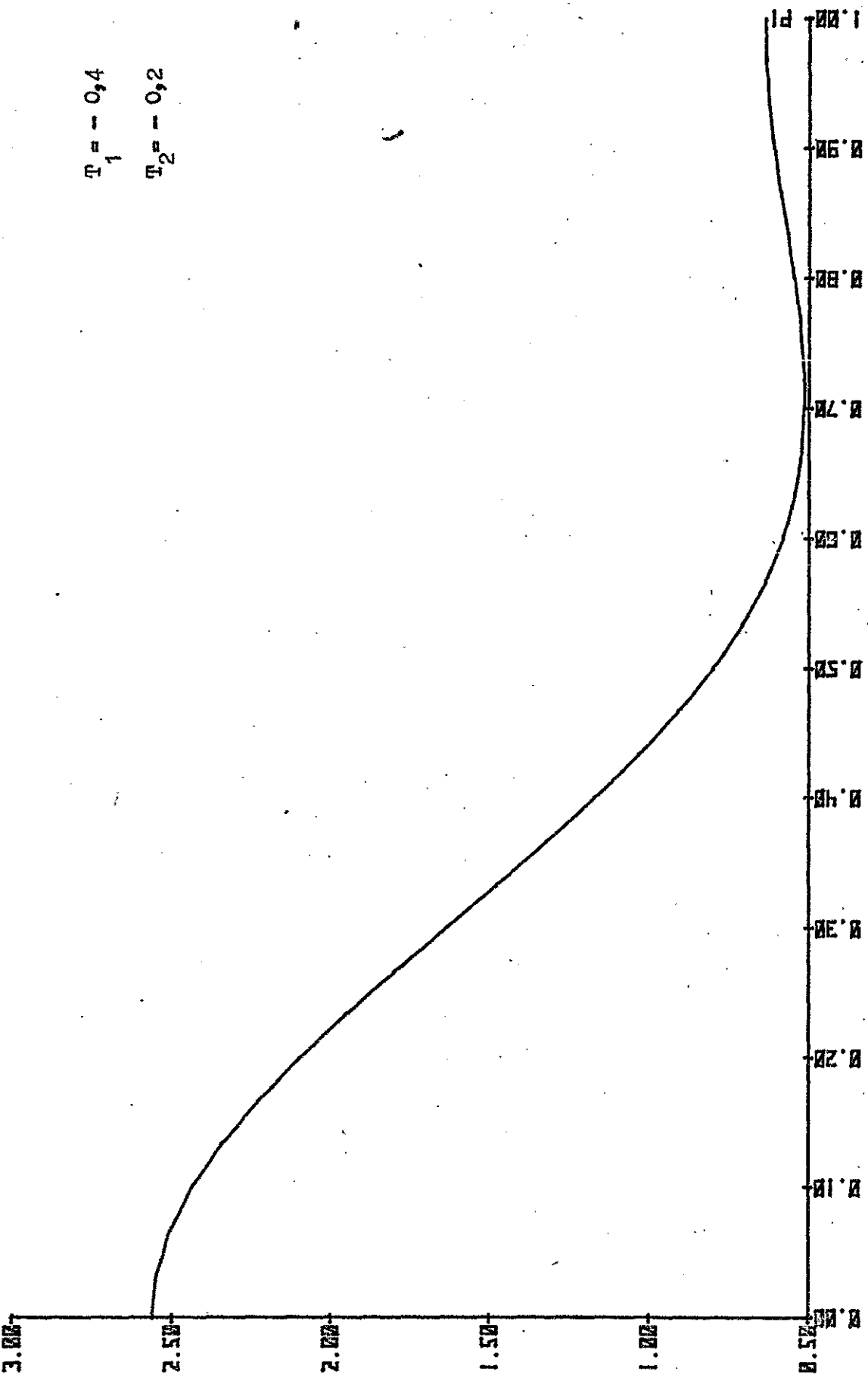
$$\pi_1 = -0,2$$

$$\pi_2 = 0,6$$

Gráfico 3-12

Gráfico 3-13



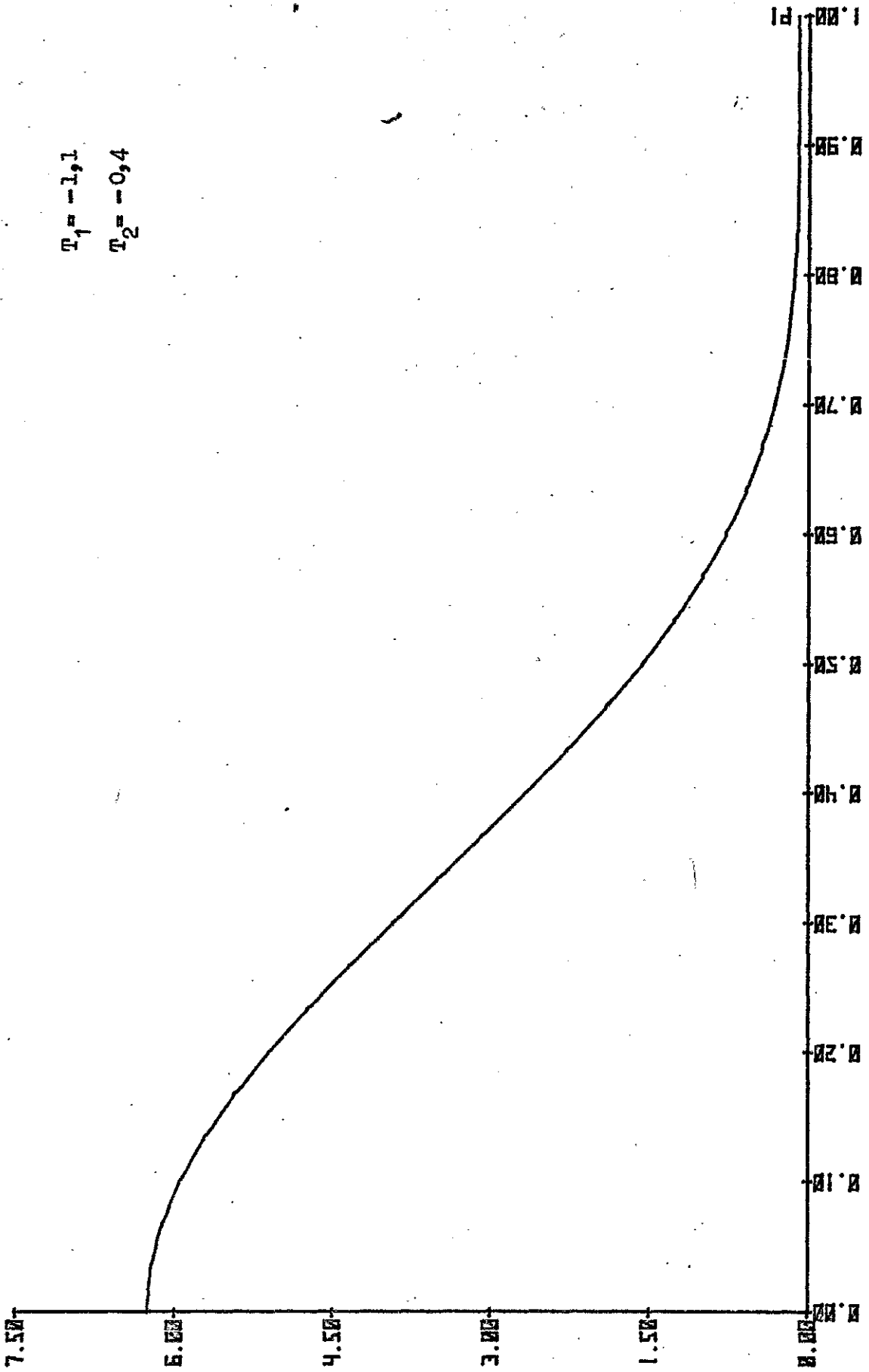


$T_1 = -0,4$

$T_2 = -0,2$

Gráfico 3-14

Gráfico 3-15



$$T_1 = -1,1$$

$$T_2 = -0,4$$

$$T_1 = 0,4$$

$$T_2 = -0,7$$

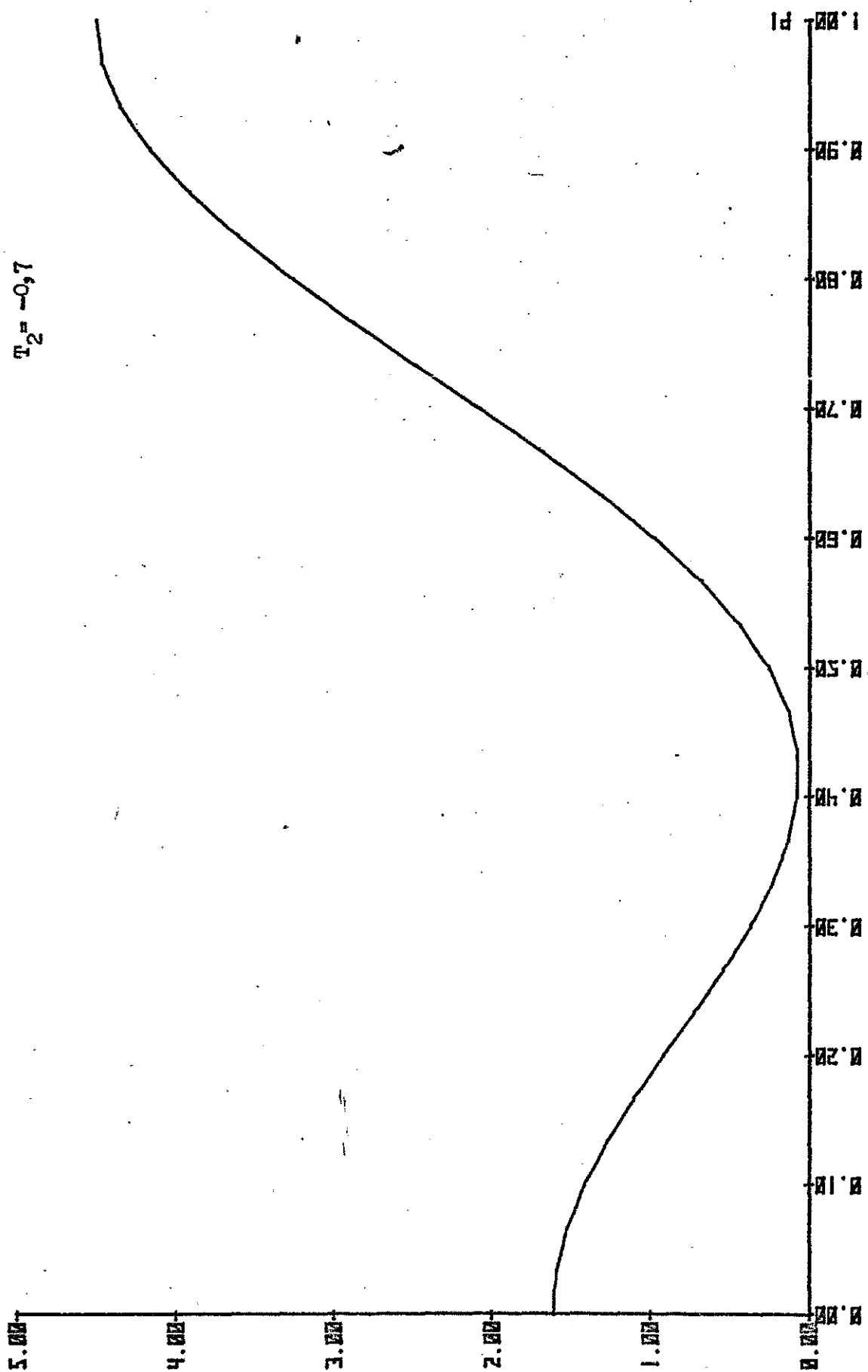
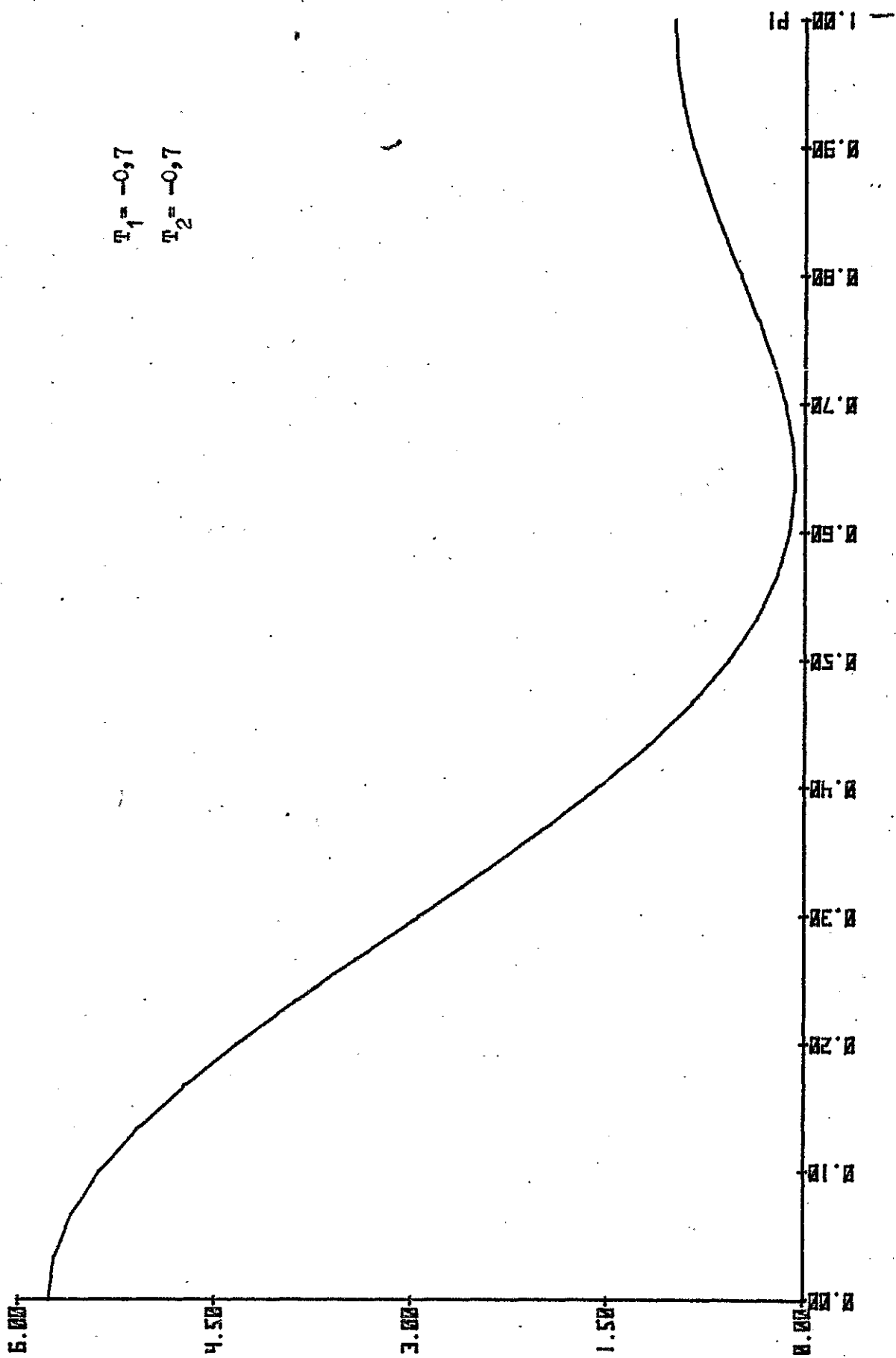


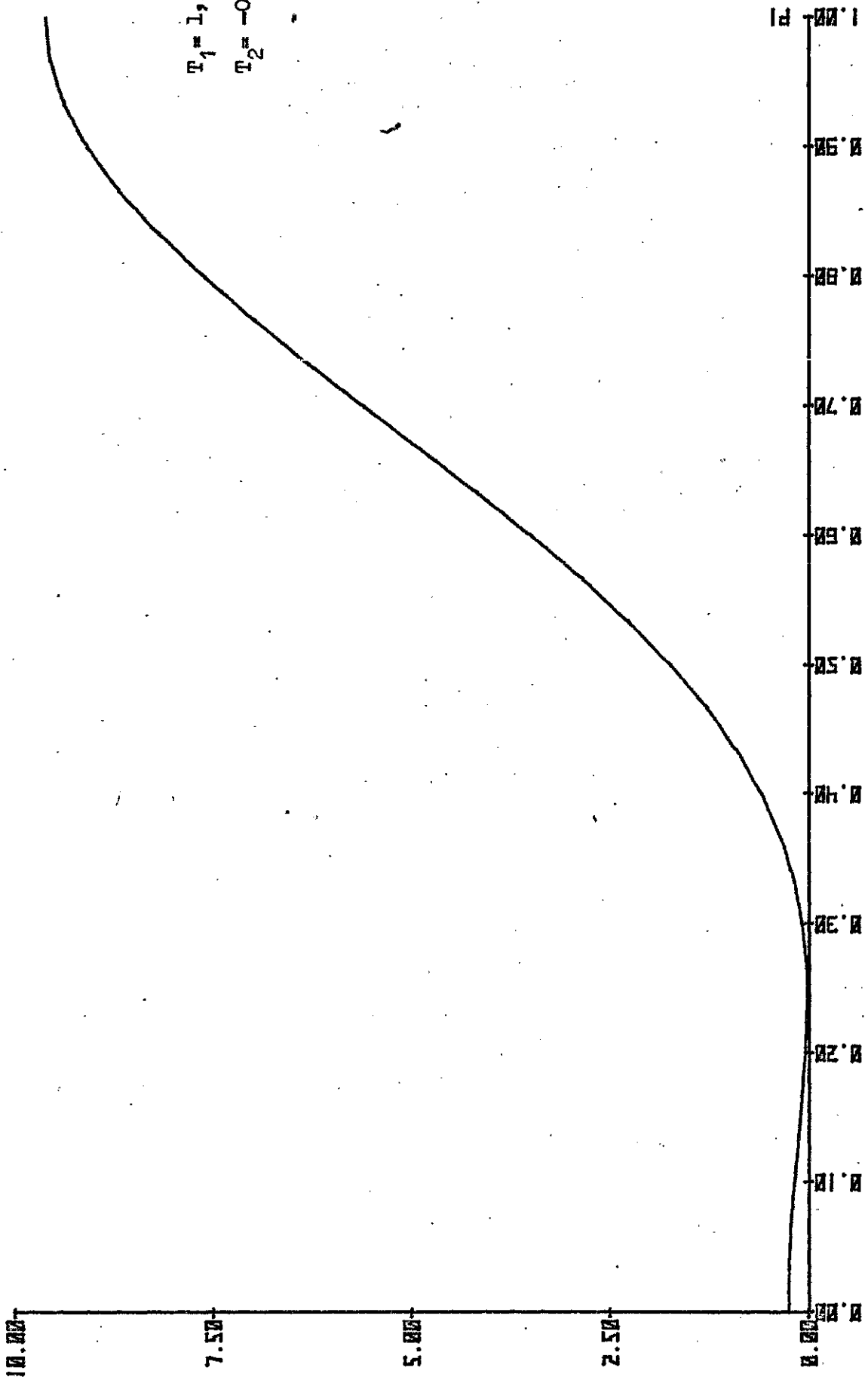
Gráfico 3-16

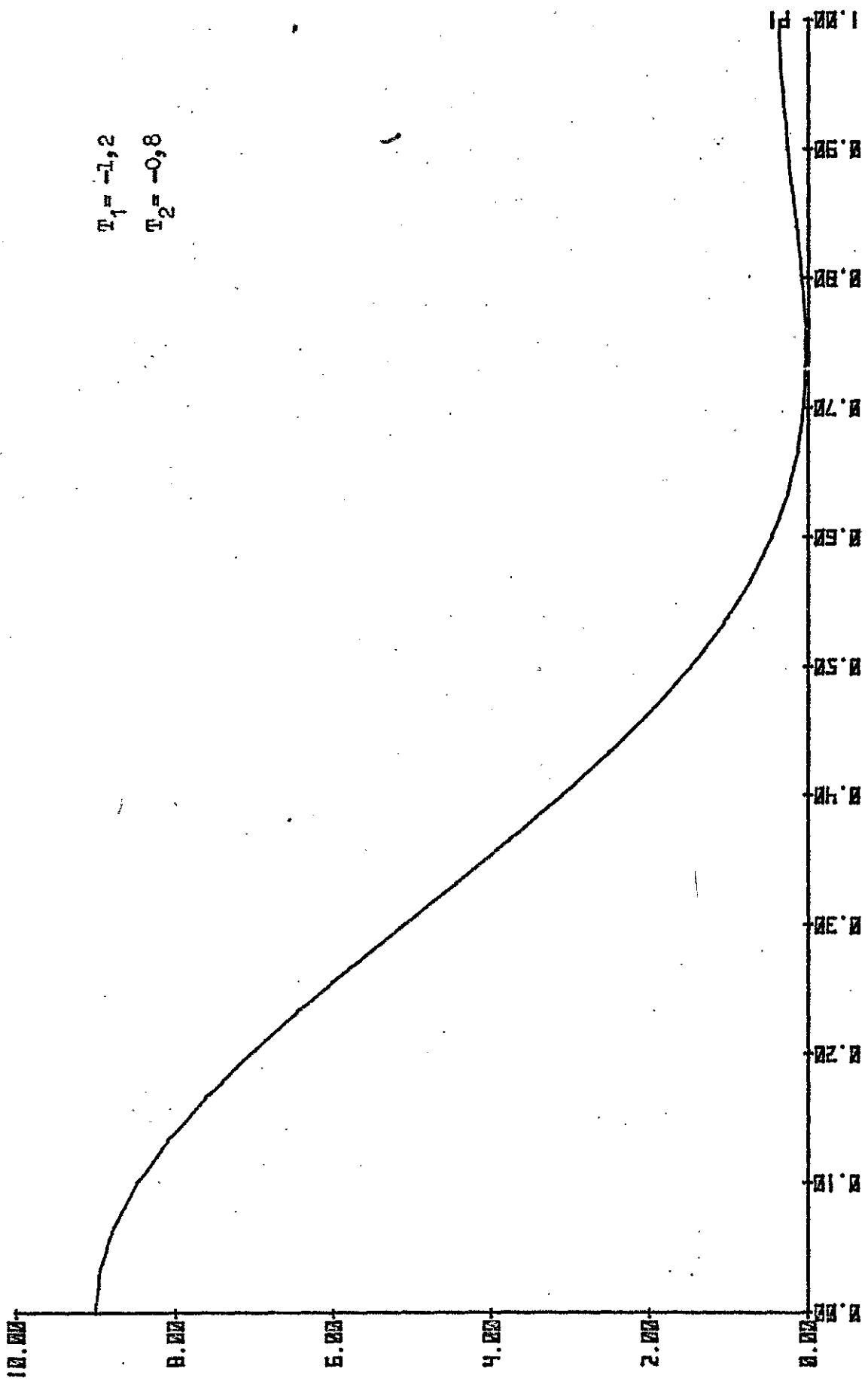


$T_1 = -0,7$
 $T_2 = -0,7$

Gráfico 3-17

Gráfico 3-18





$$\pi_1 = -1,2$$

$$\pi_2 = -0,8$$

Gráfico 3-19

Gráfico 3-20

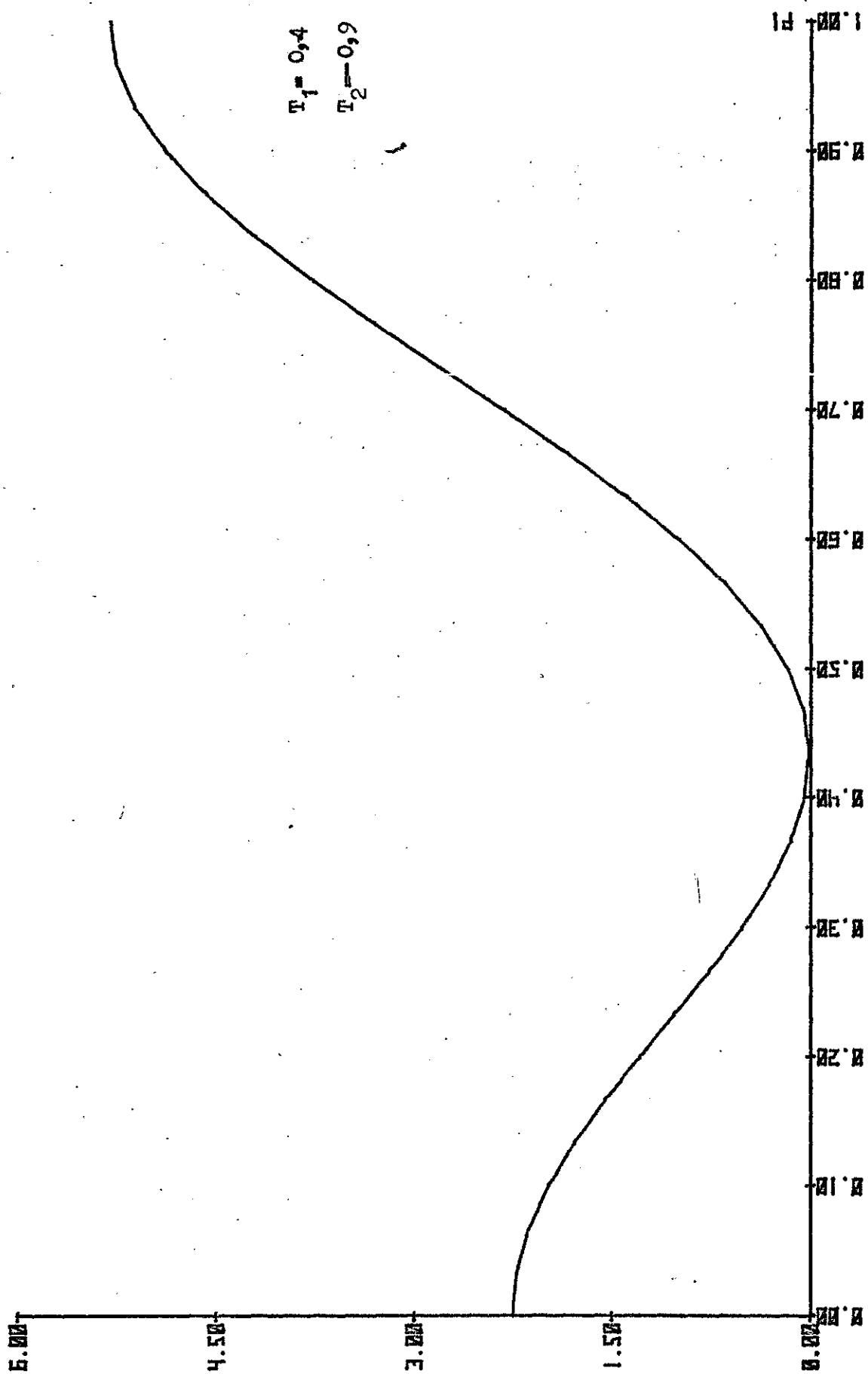
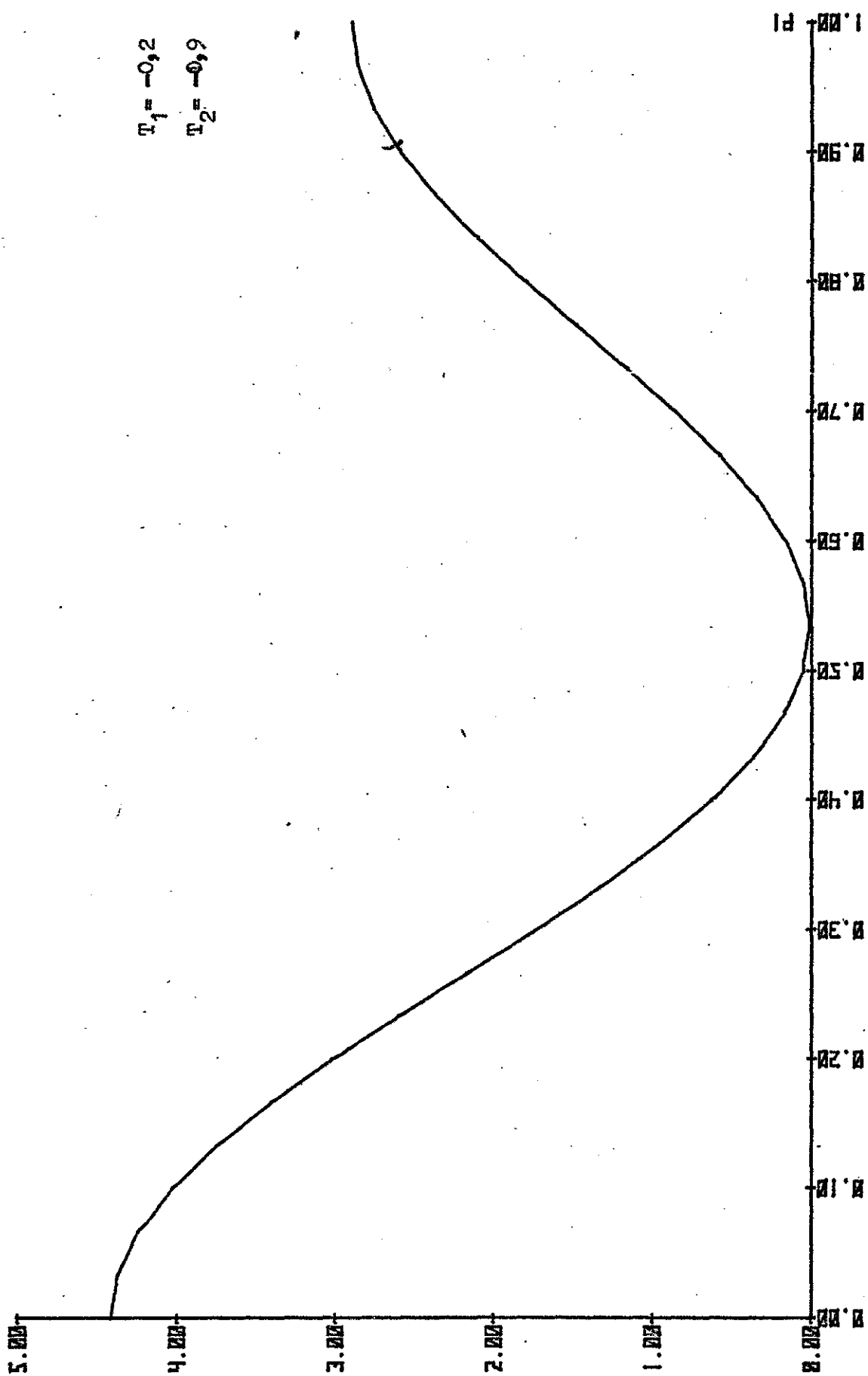
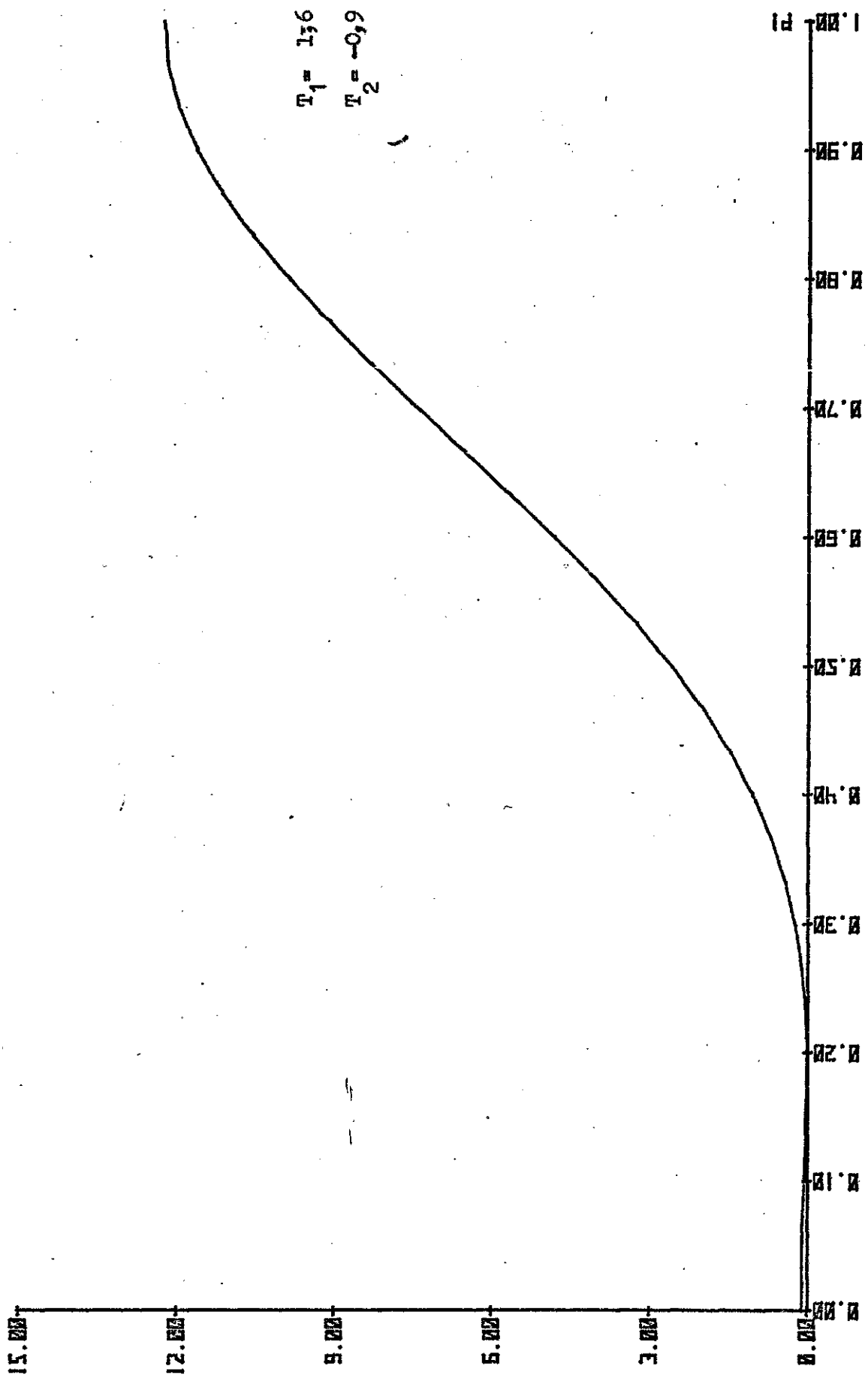


Gráfico 3-21

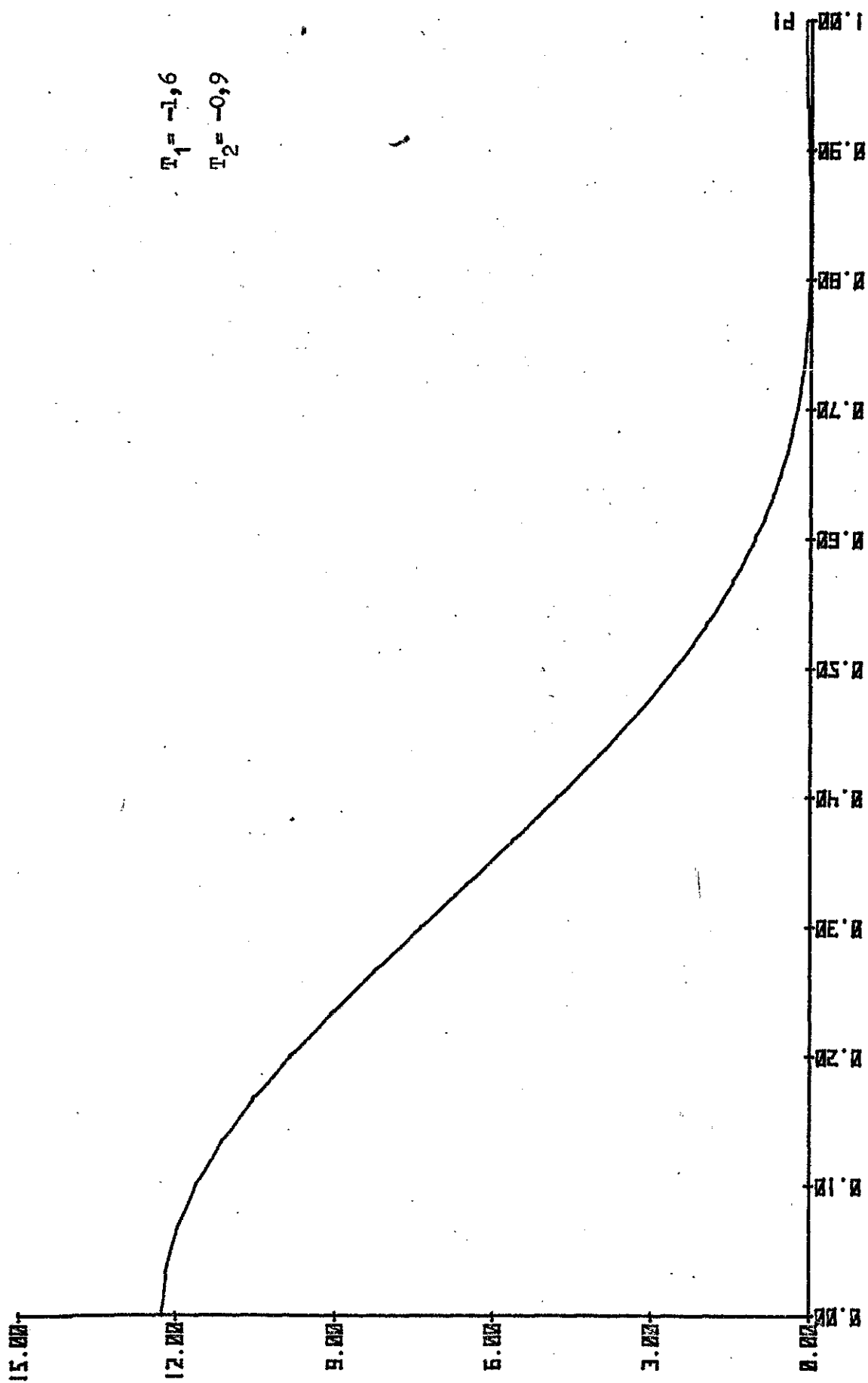




$T_1 = 1.36$
 $T_2 = -0.9$

Gráfico 3-22

Gráfico 3-23



$$\pi_1 = -1,6$$

$$\pi_2 = -0,9$$

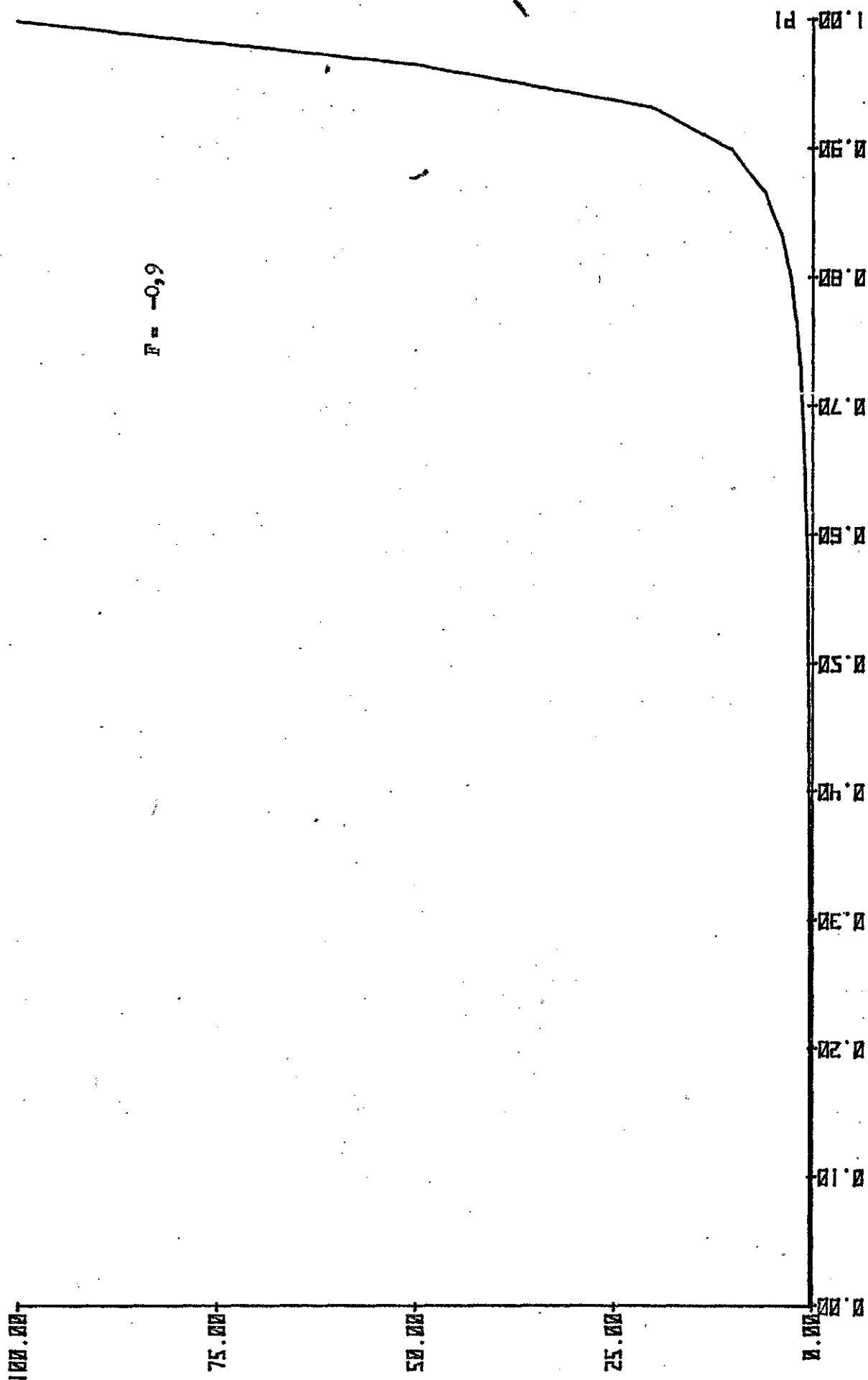


Gráfico 3-24

Gráfico 3-25

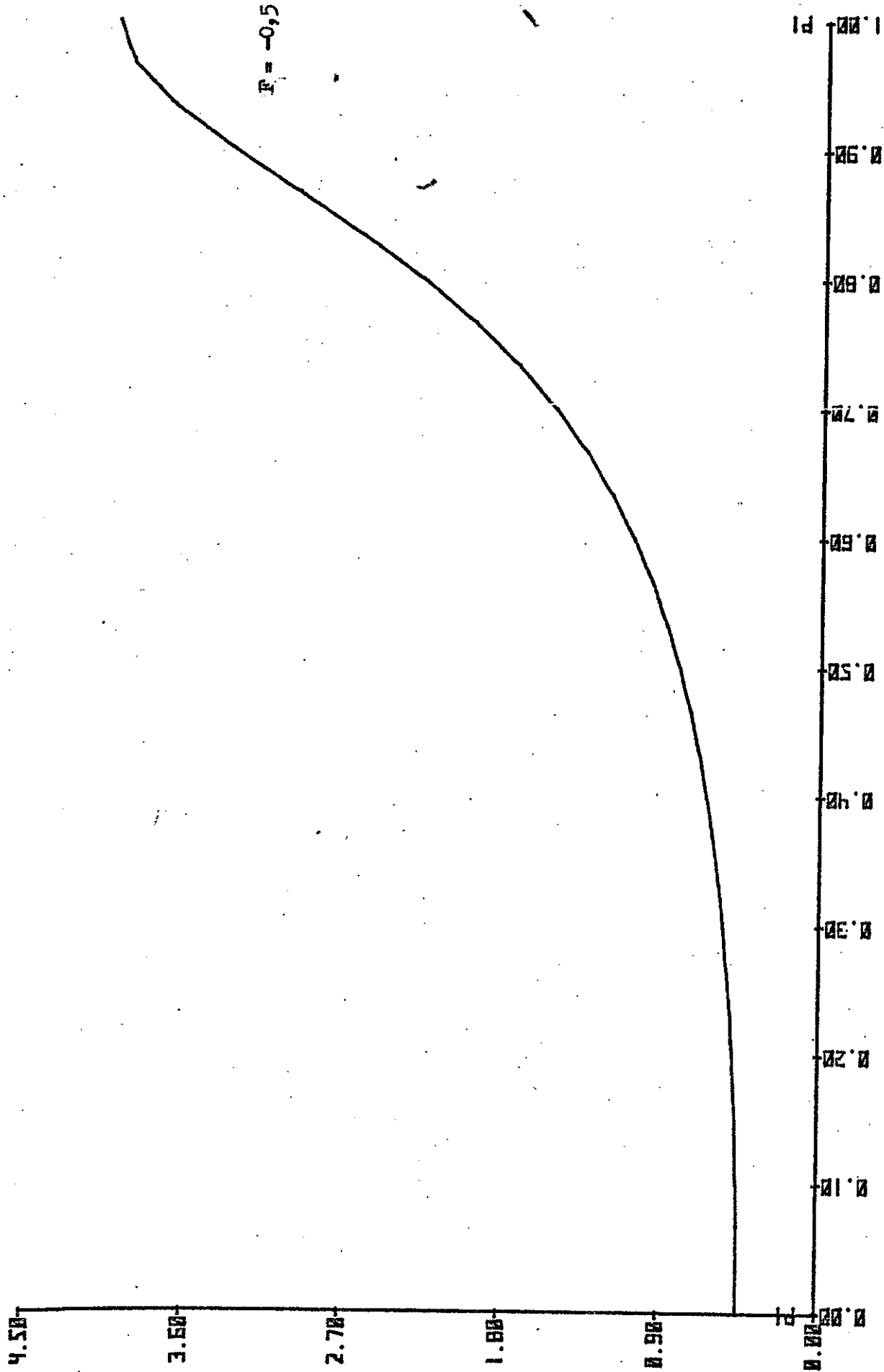
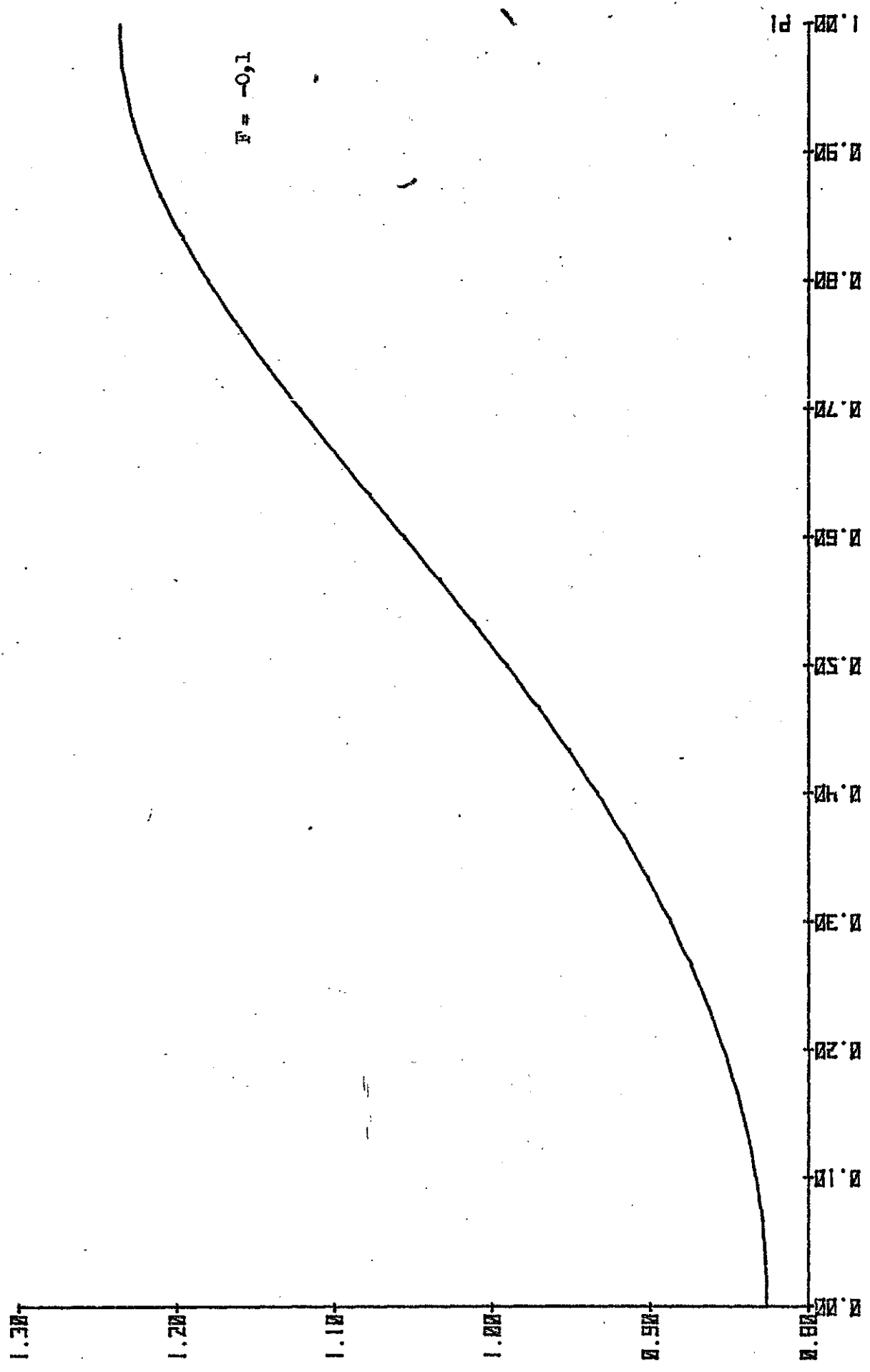


Gráfico 3-26



$\bar{F} = -0.1$

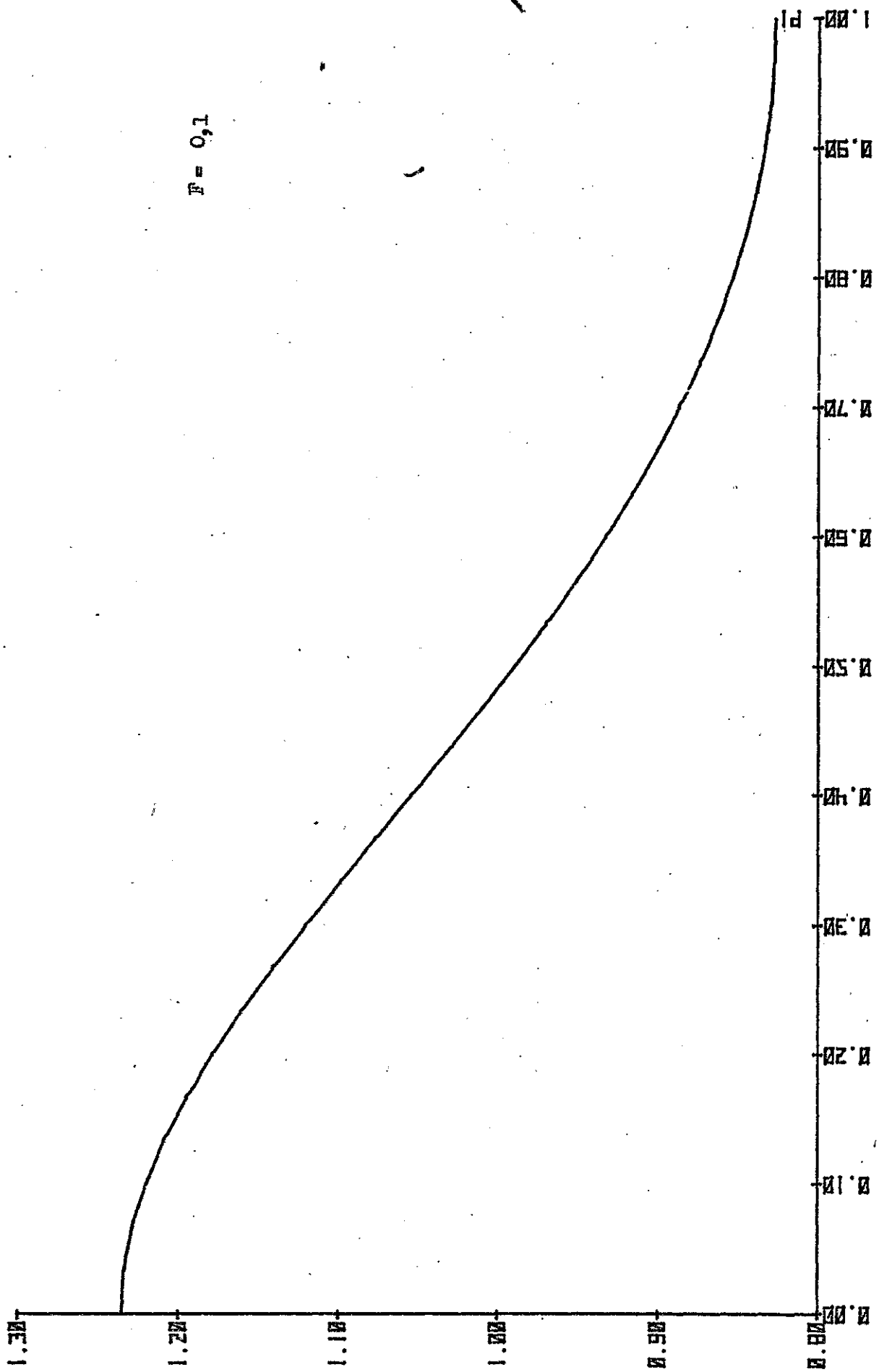


Gráfico 3-27

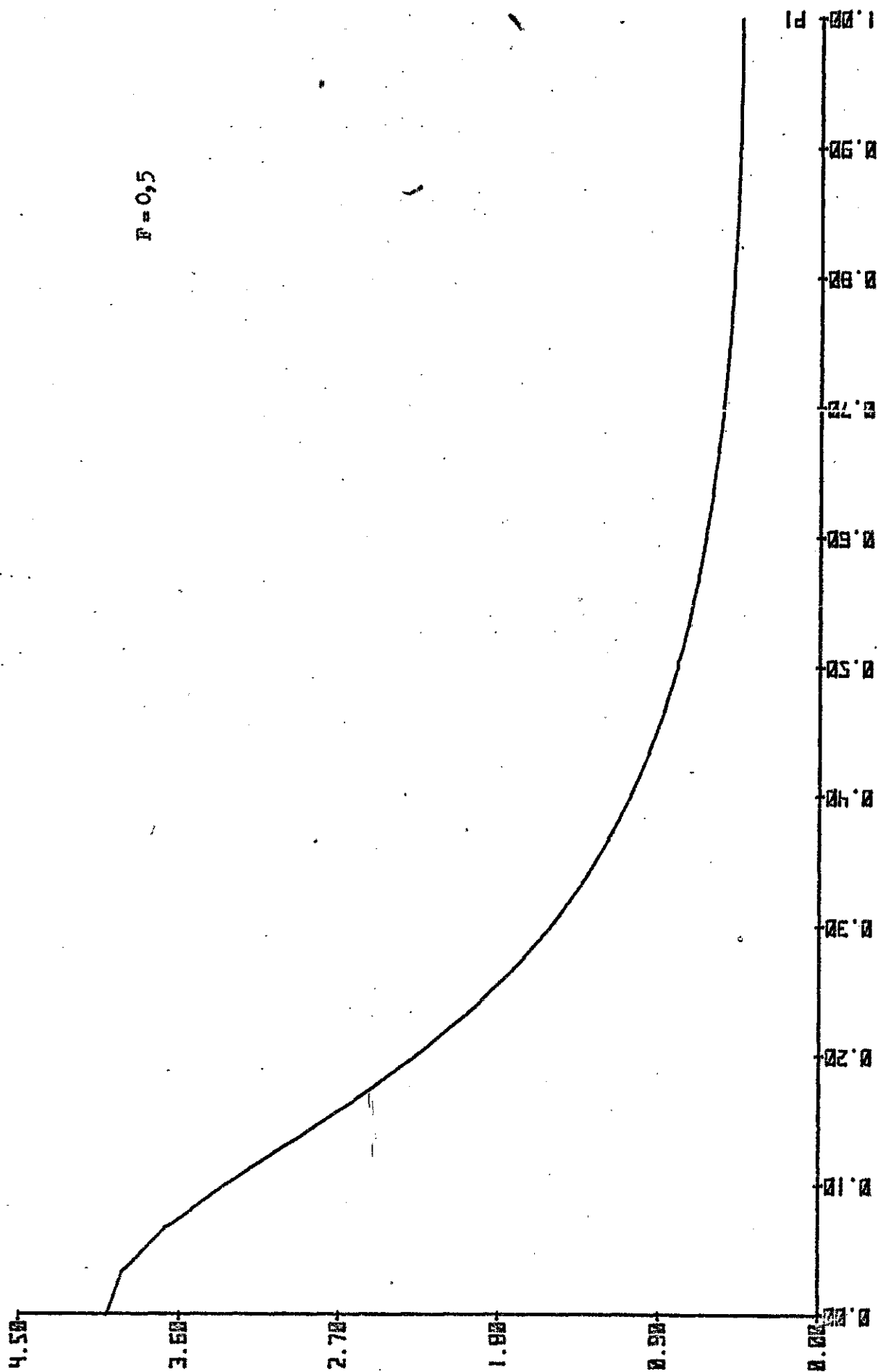
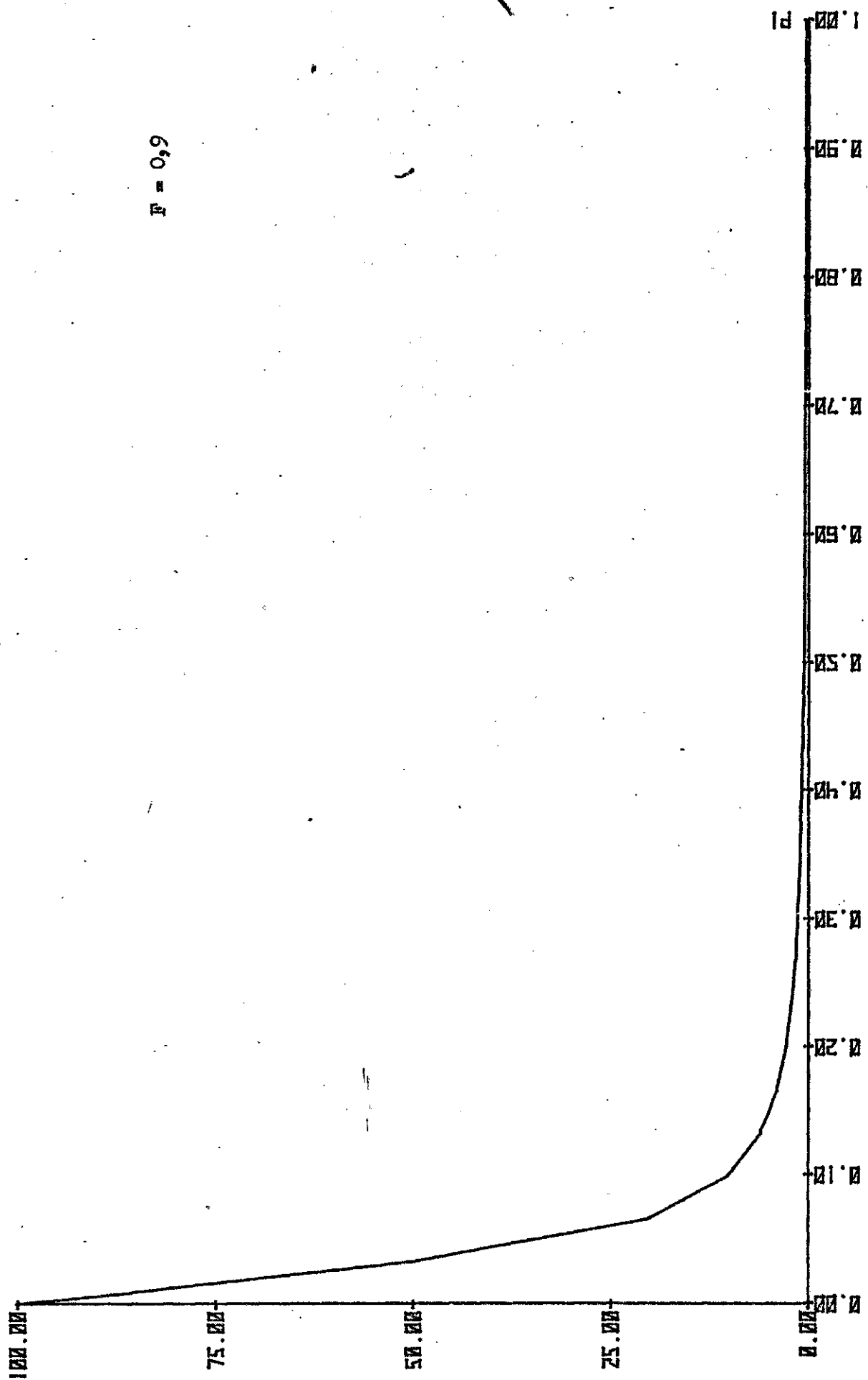
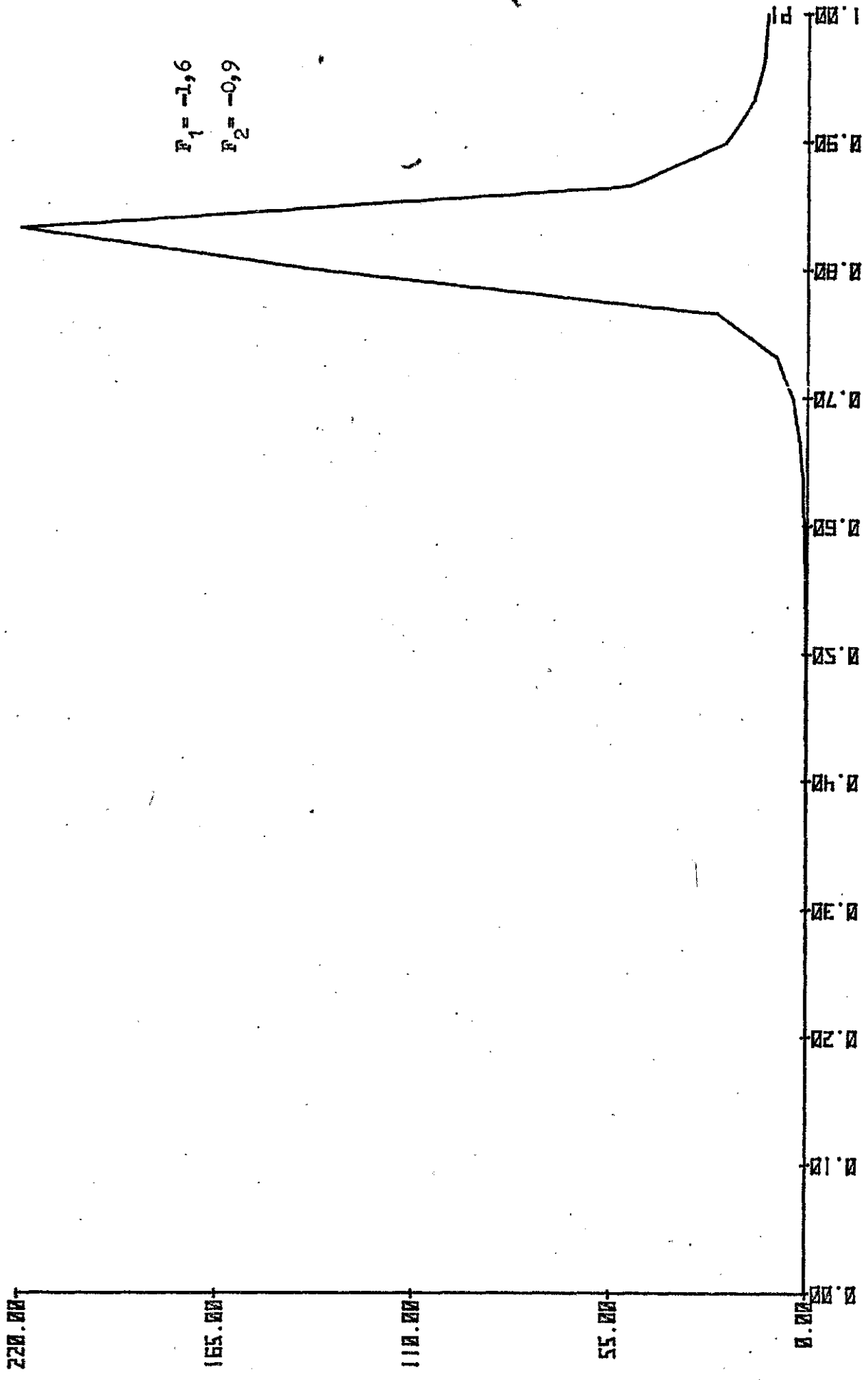


Gráfico 3-28

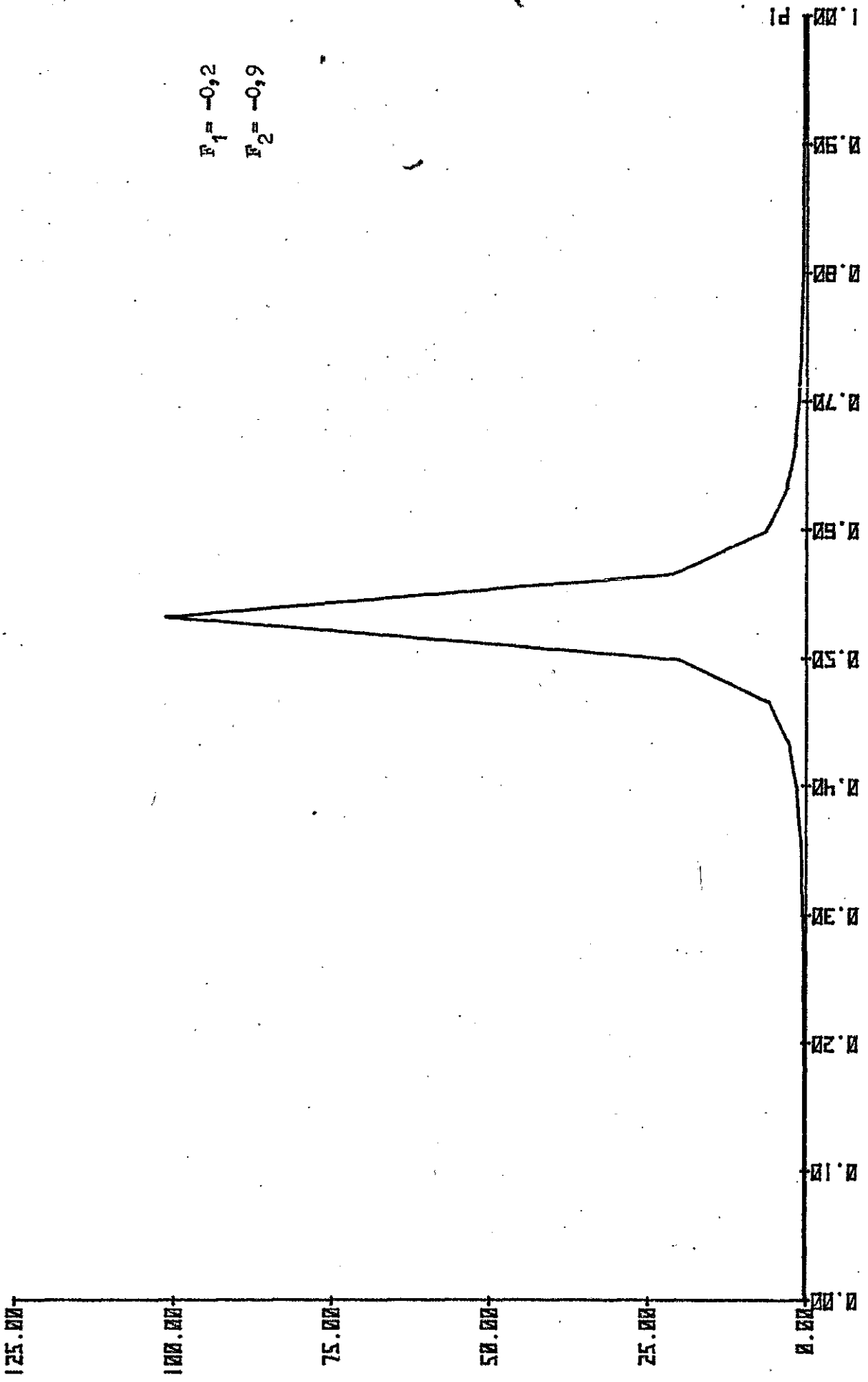




$P_1 = -1,6$
 $P_2 = -0,9$

Gráfico 3-30

Gráfico 3-31



$$P_1 = -0,2$$

$$P_2 = -0,9$$

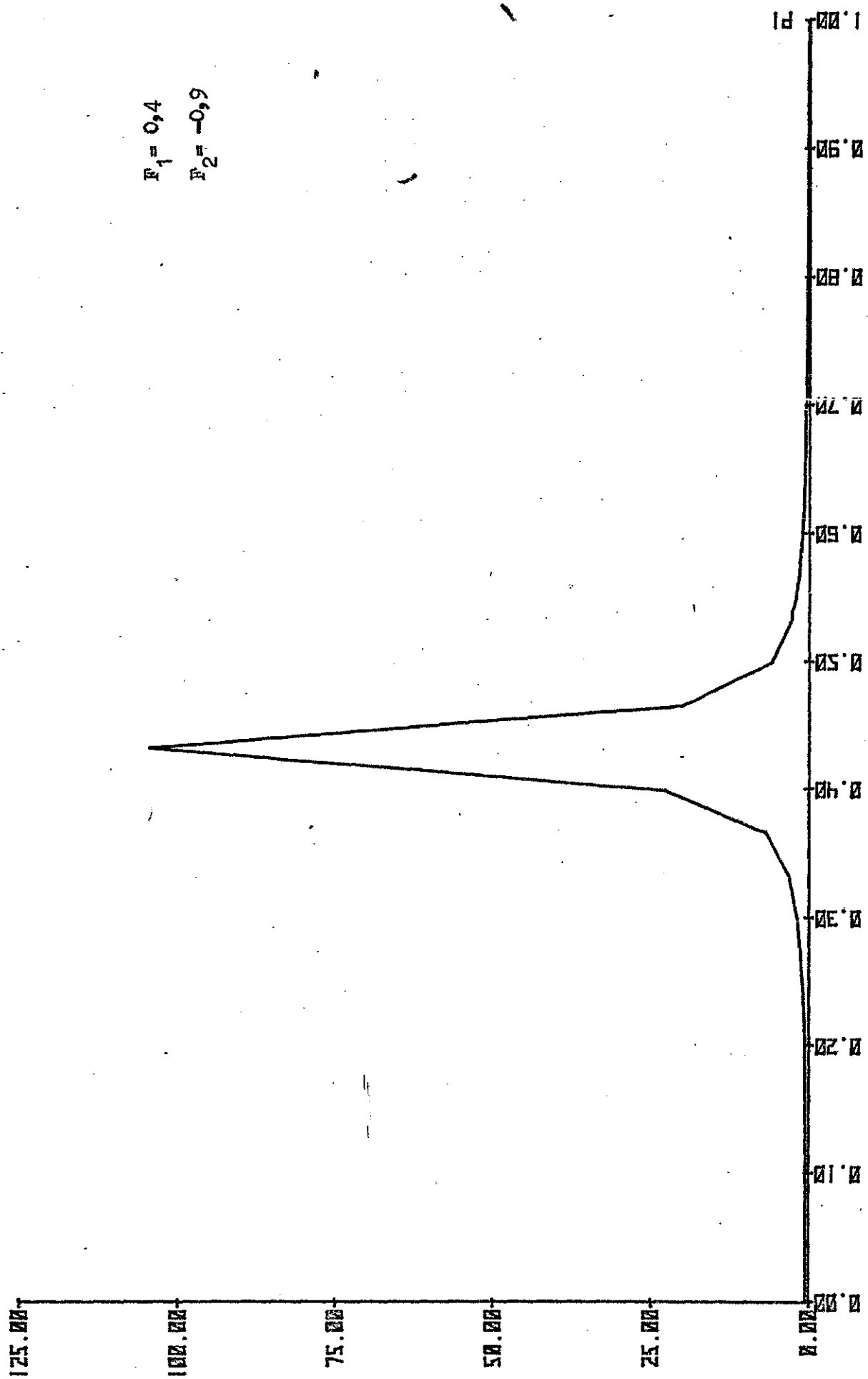
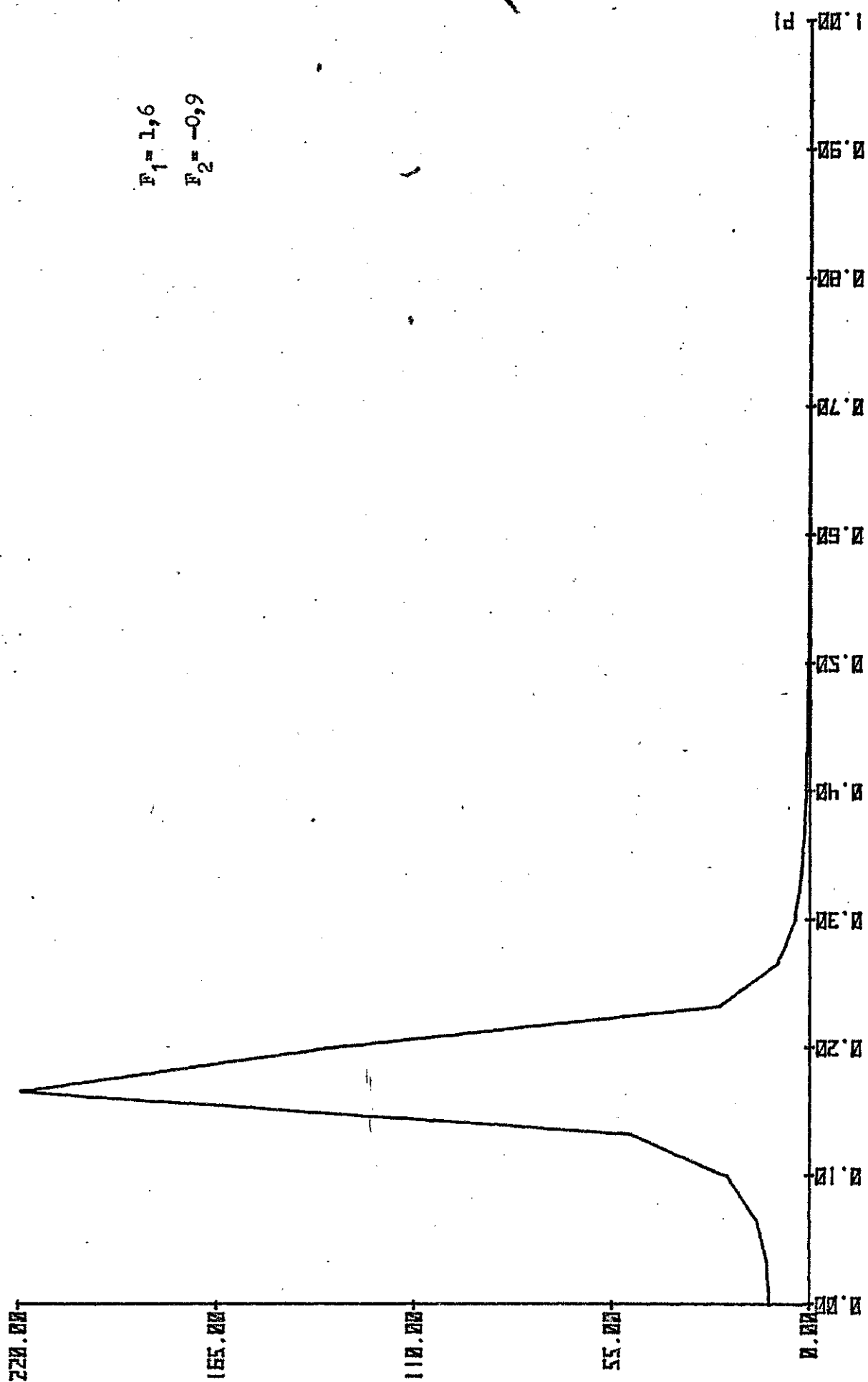
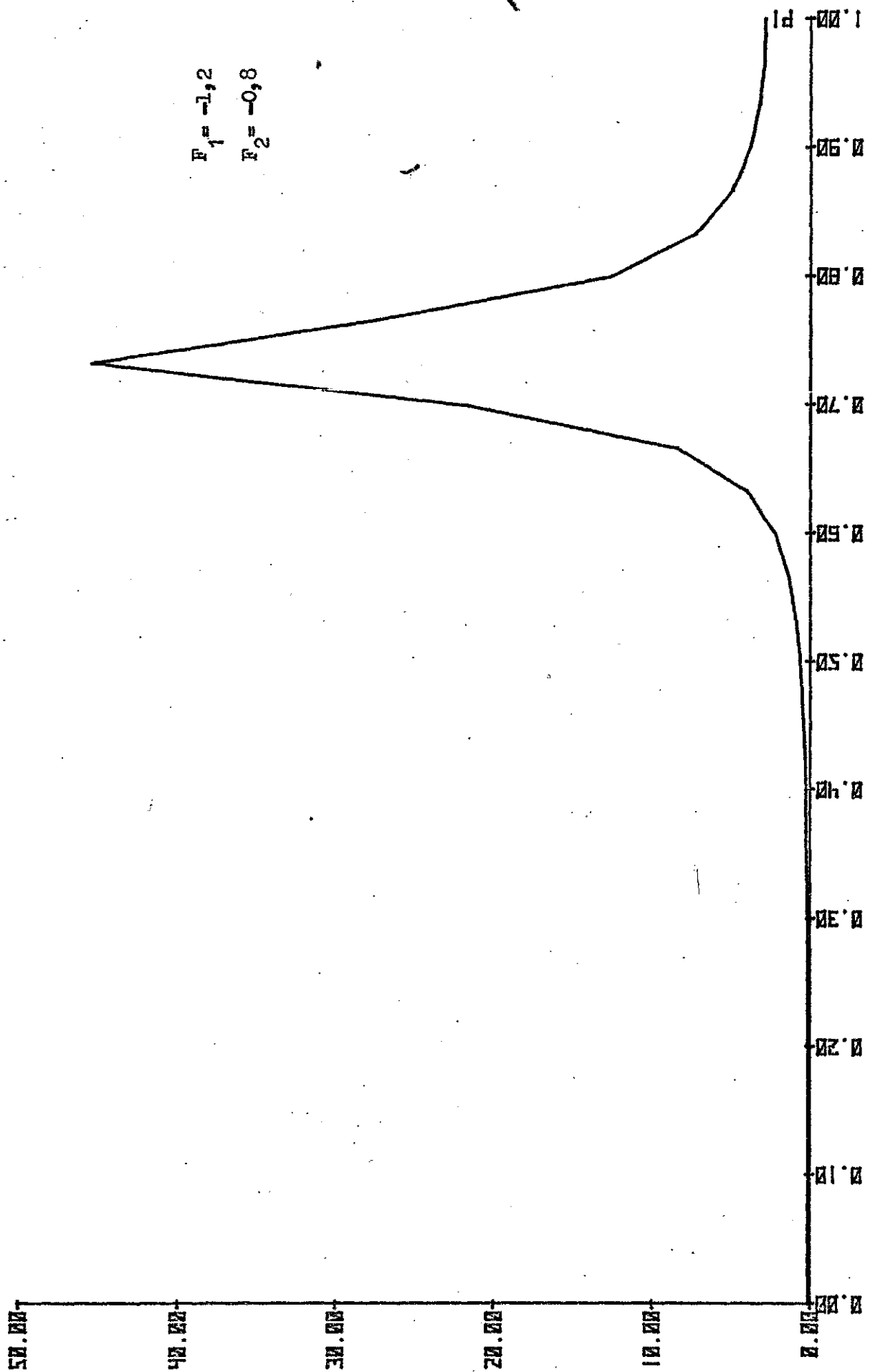


Gráfico 3-33



$$F_1 = 1,6$$

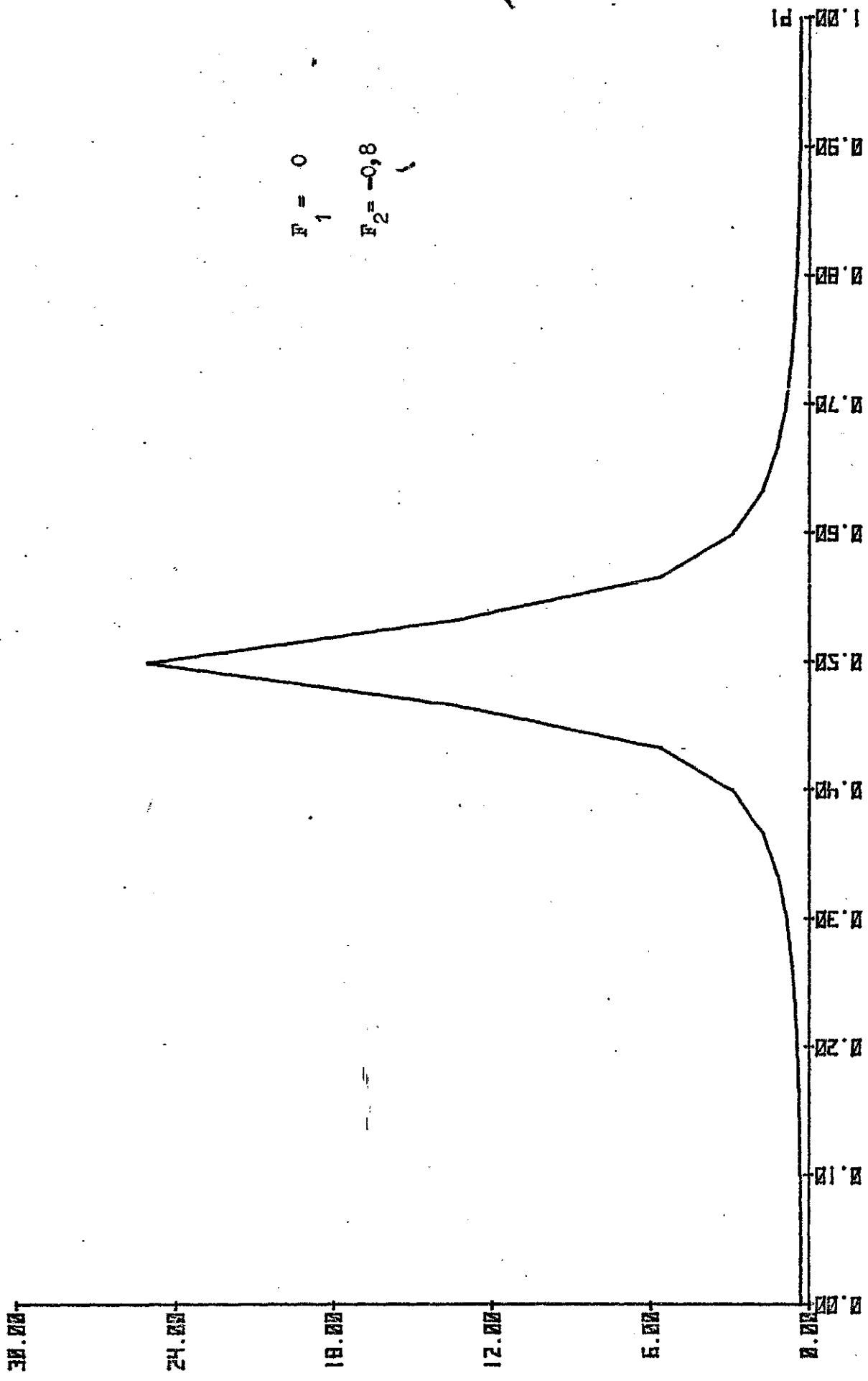
$$F_2 = -0,9$$



$$F_1 = -1,2$$

$$F_2 = -0,8$$

Gráfico 3-34



$$F_1 = 0$$

$$F_2 = -0,8$$

Gráfico 3-36

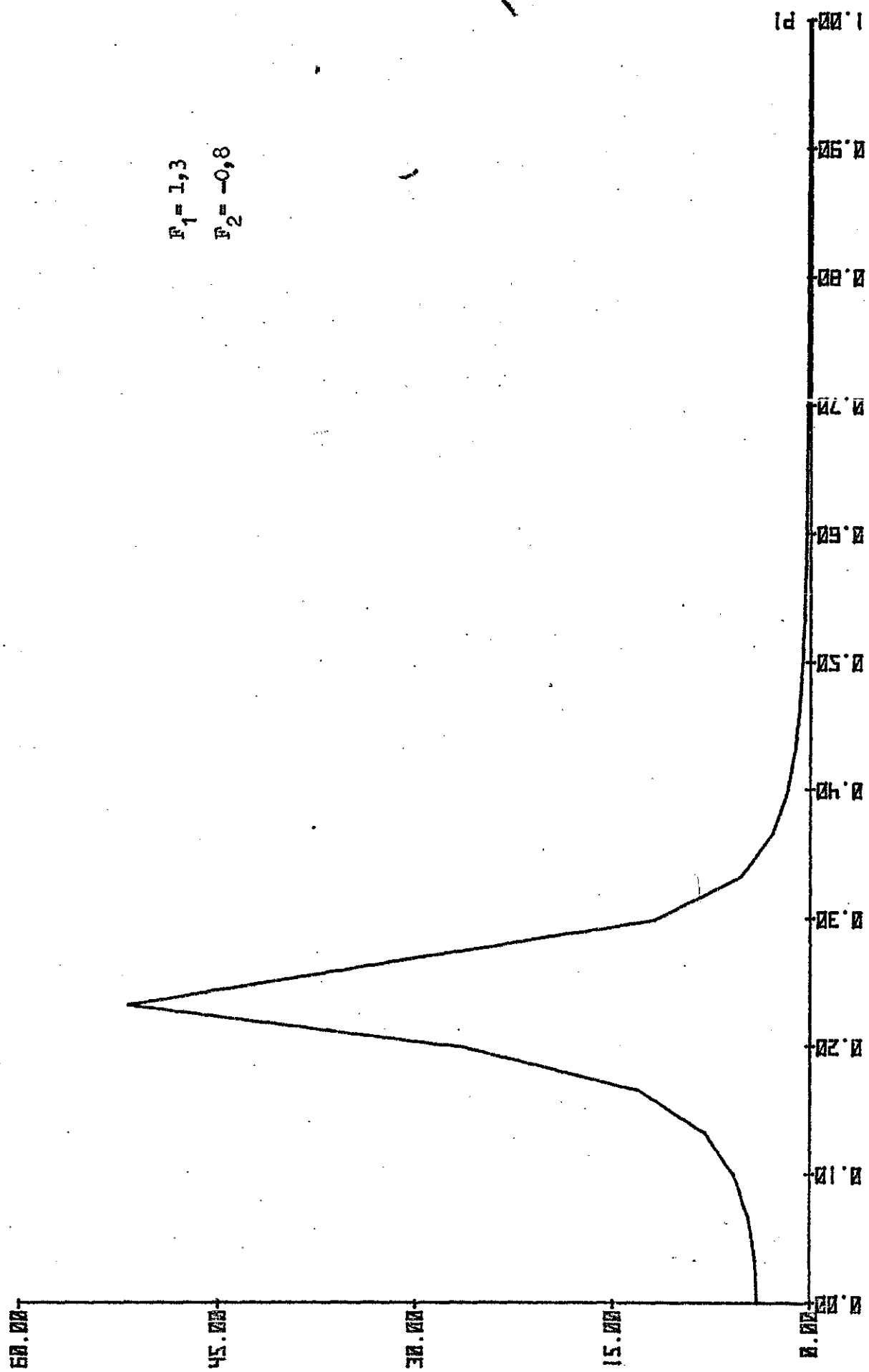
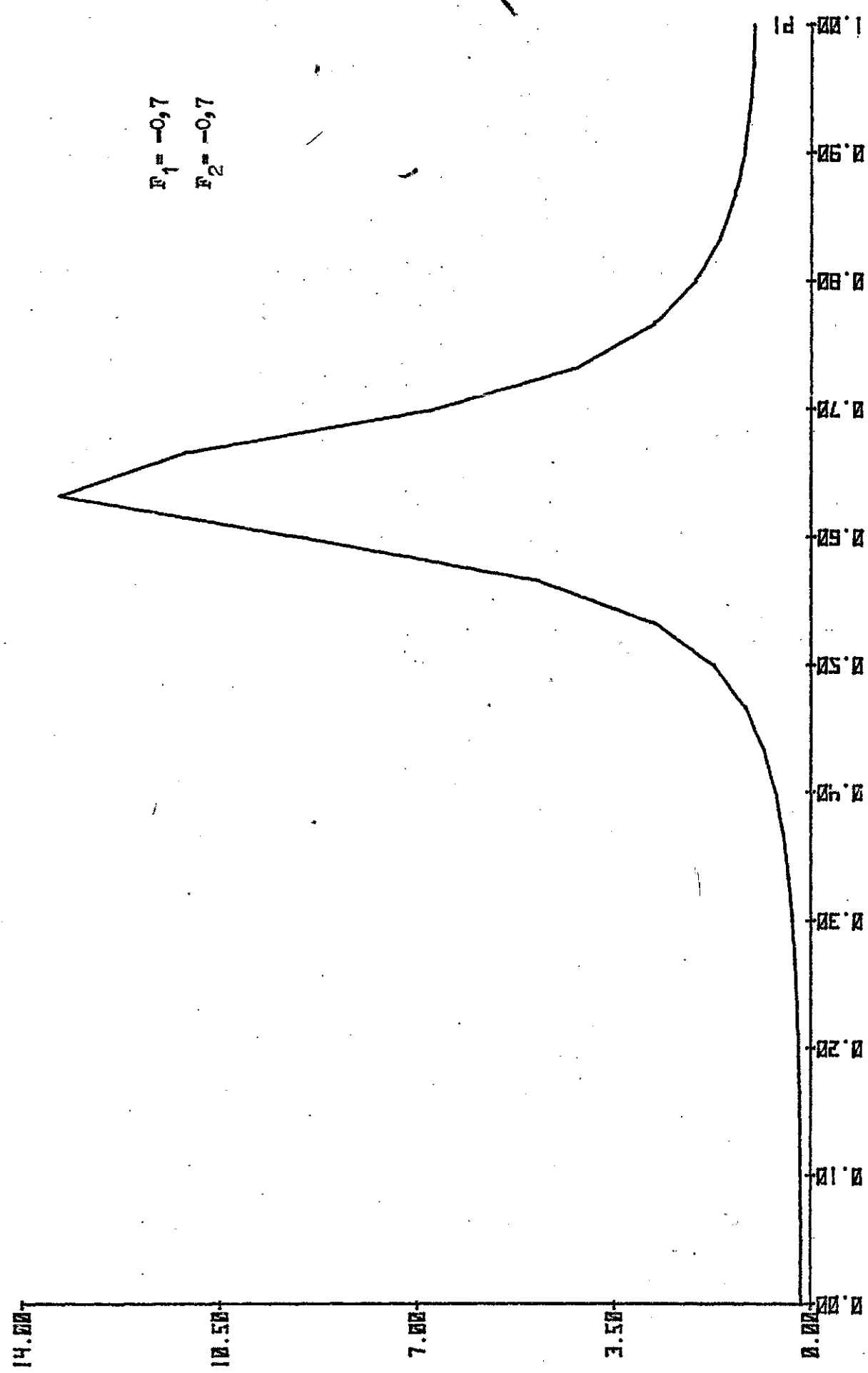


Gráfico 3-37



$F_1 = -0,7$
 $F_2 = -0,7$

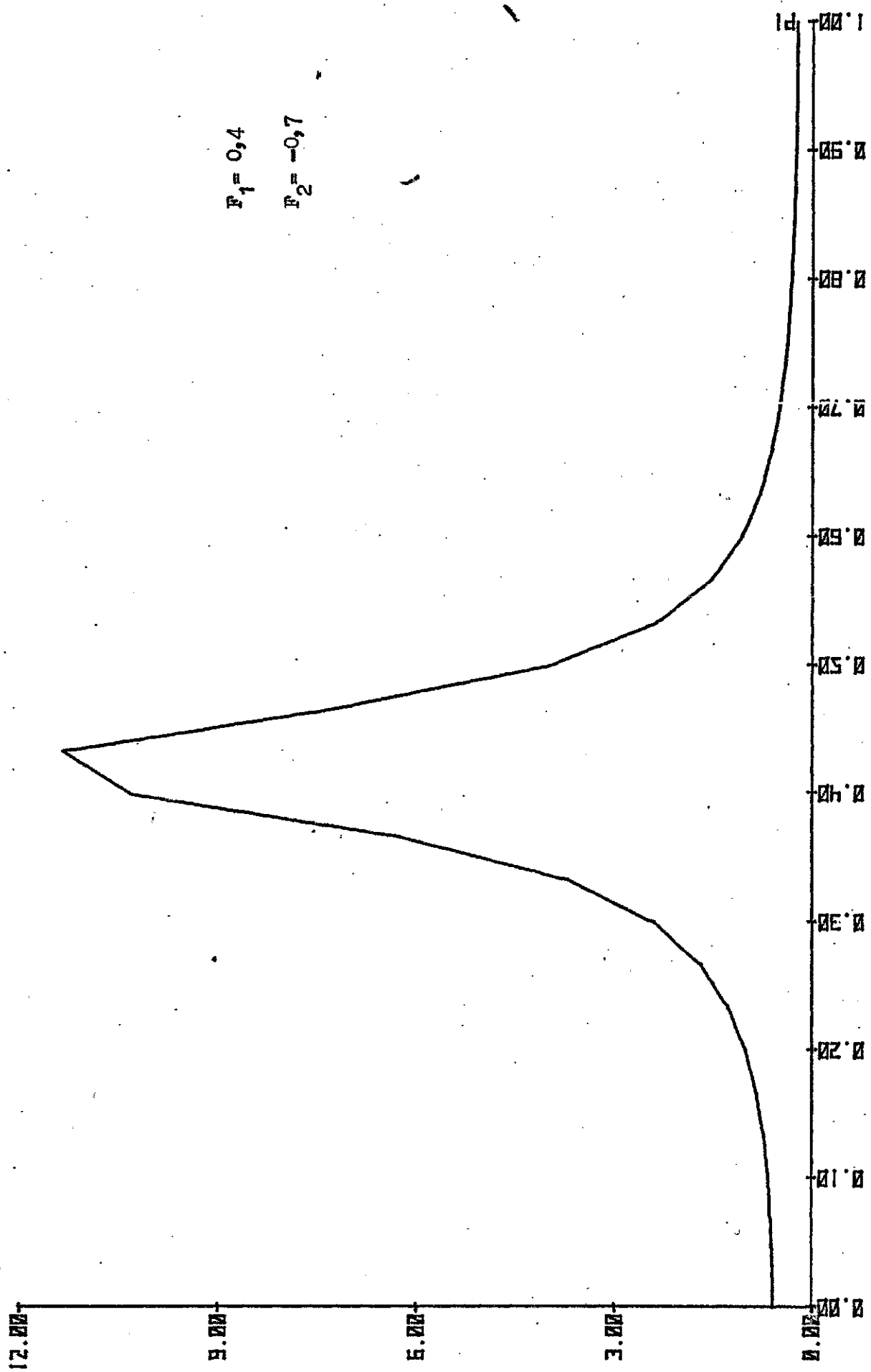
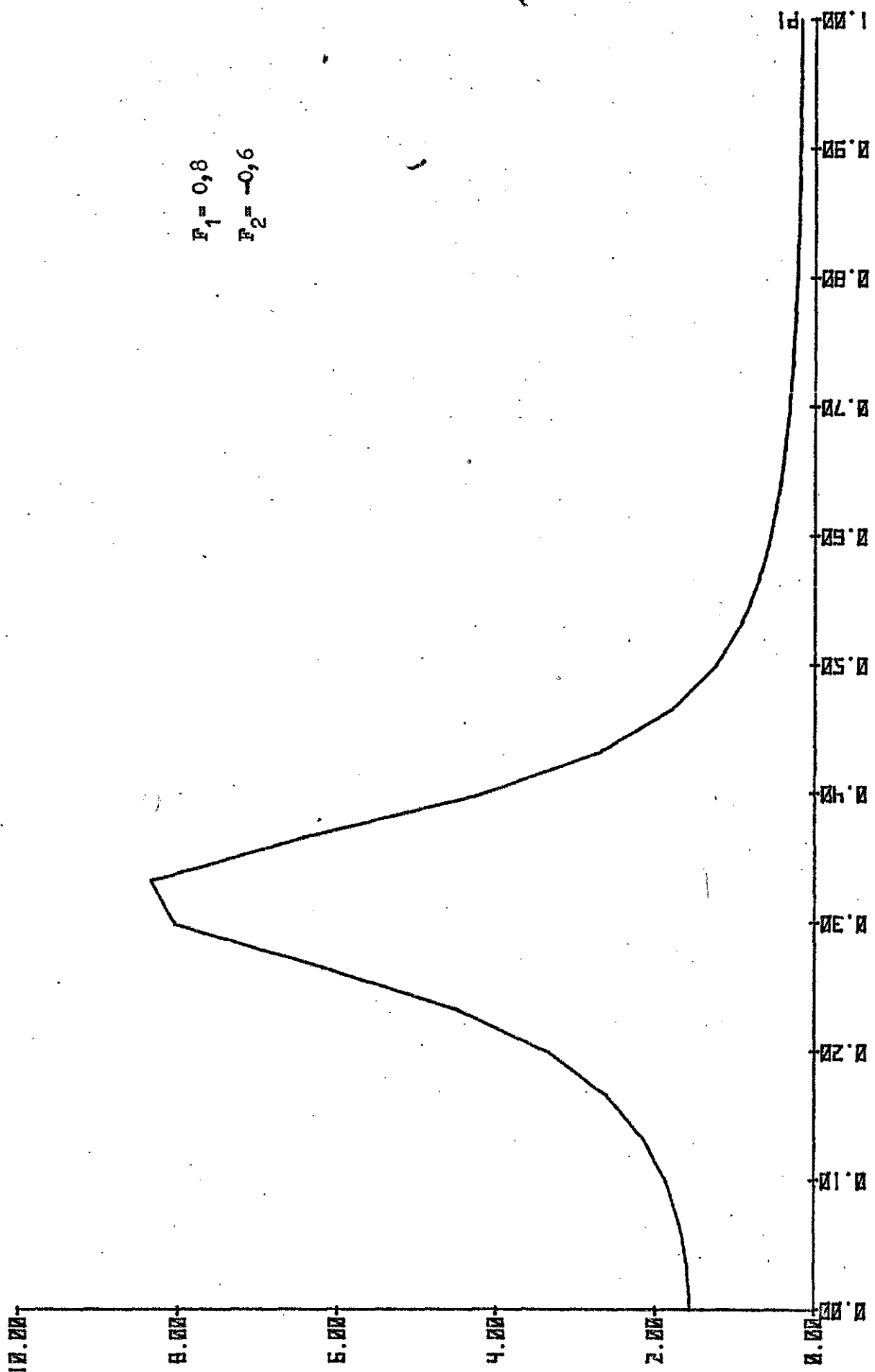
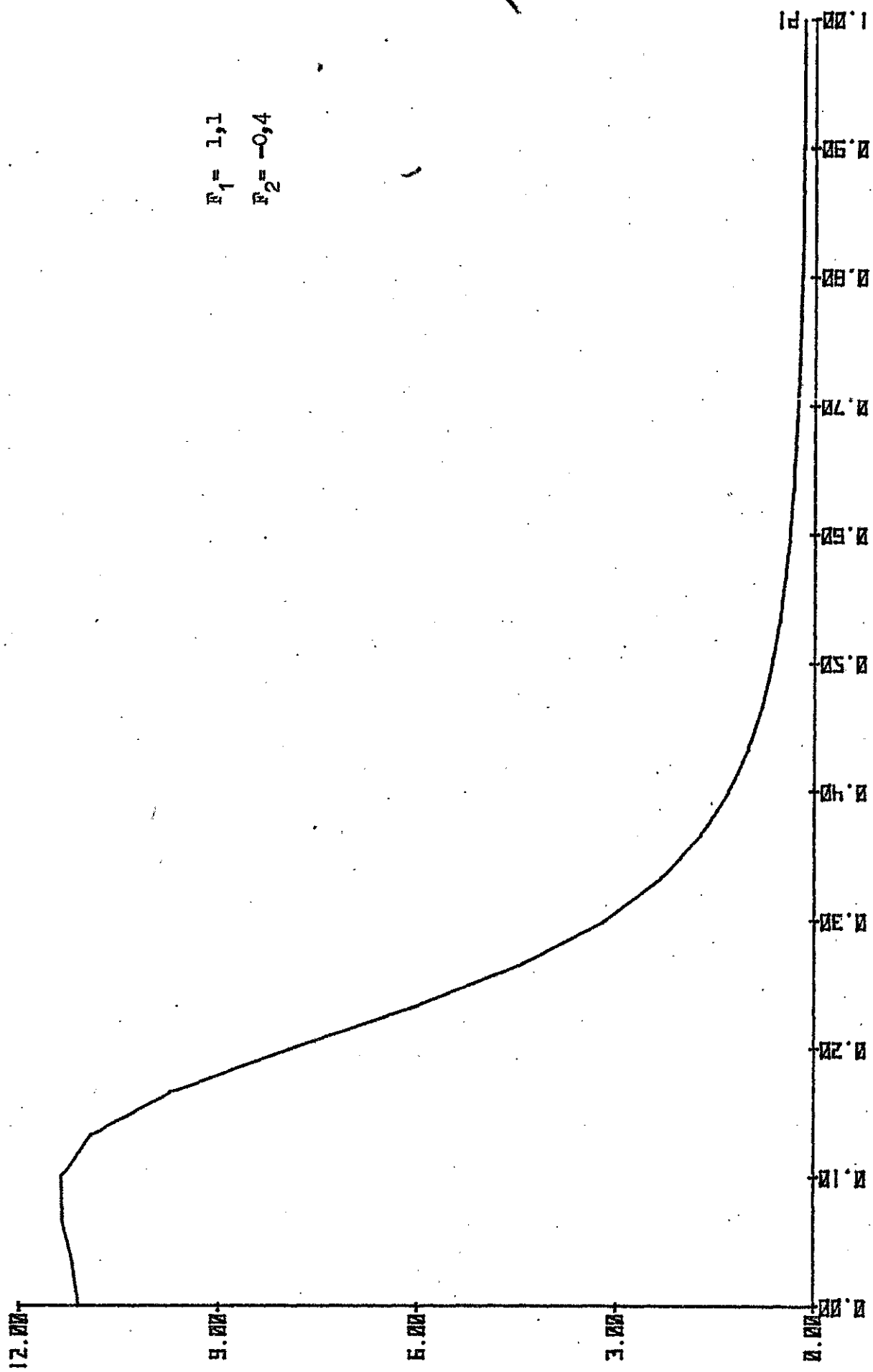


Gráfico 3-38



$F_1 = 0,8$
 $F_2 = -0,6$



$$P_1 = 1,1$$

$$P_2 = -0,4$$

Gráfico 3-40

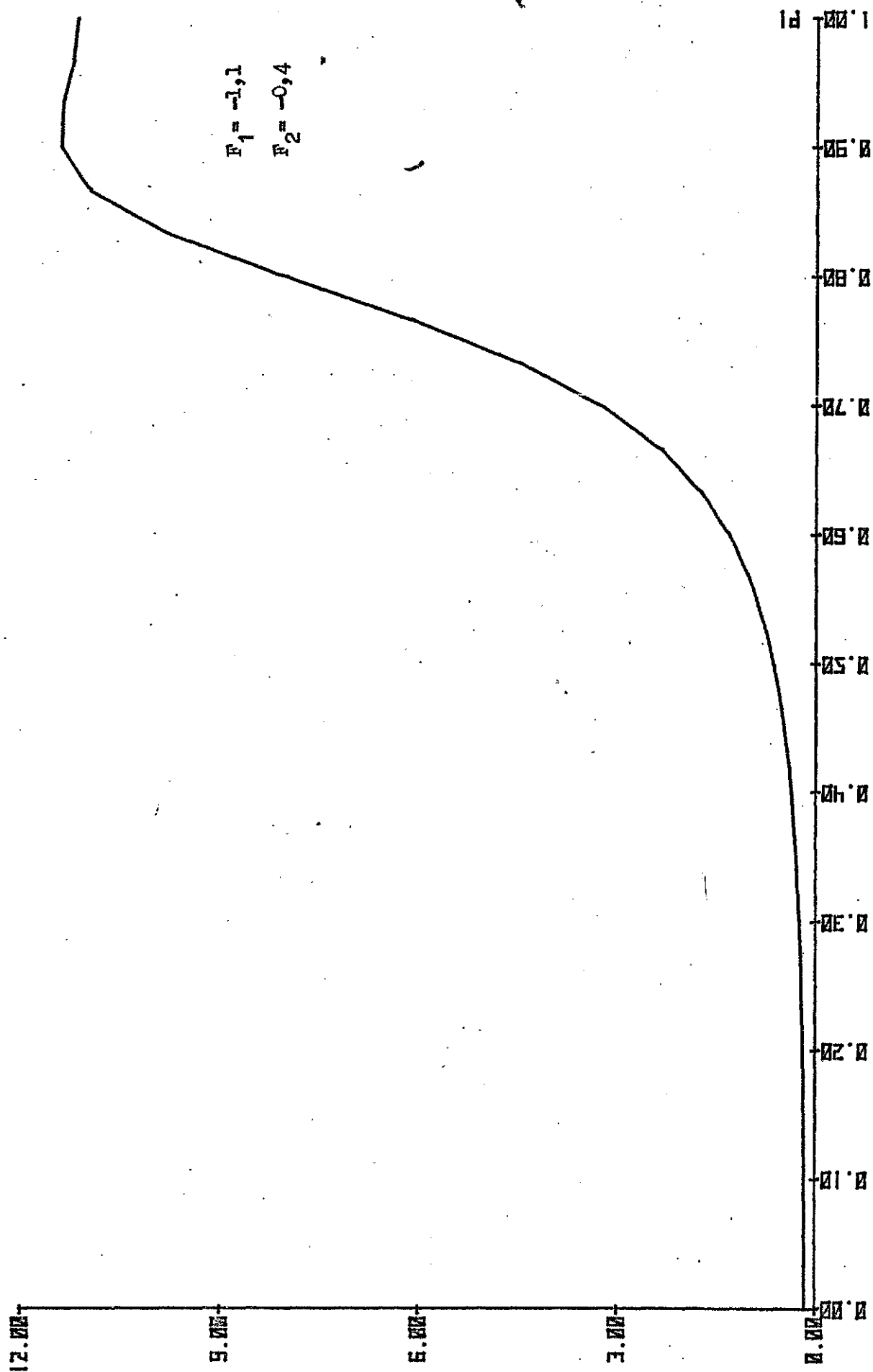


Gráfico 3-41

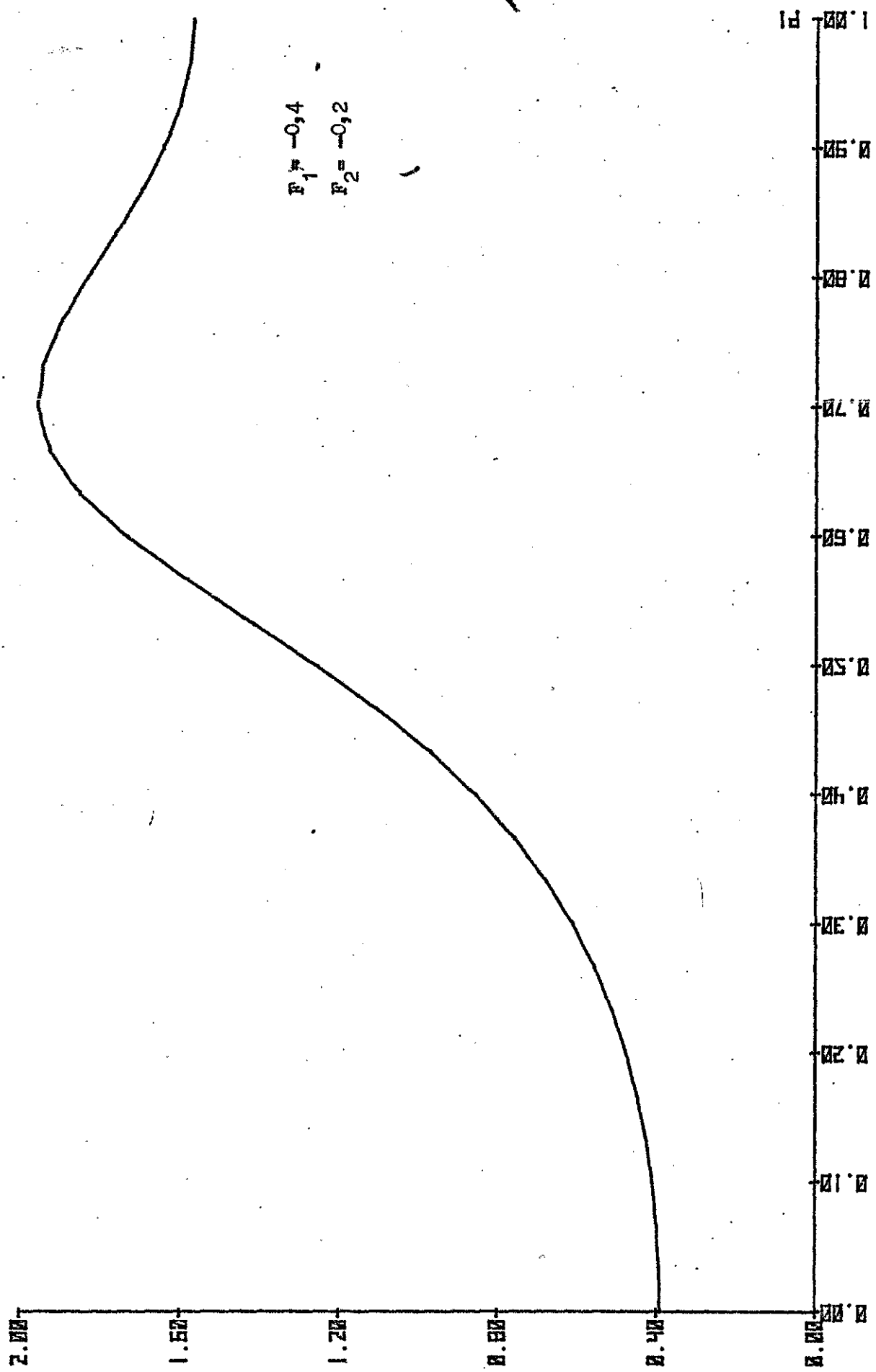
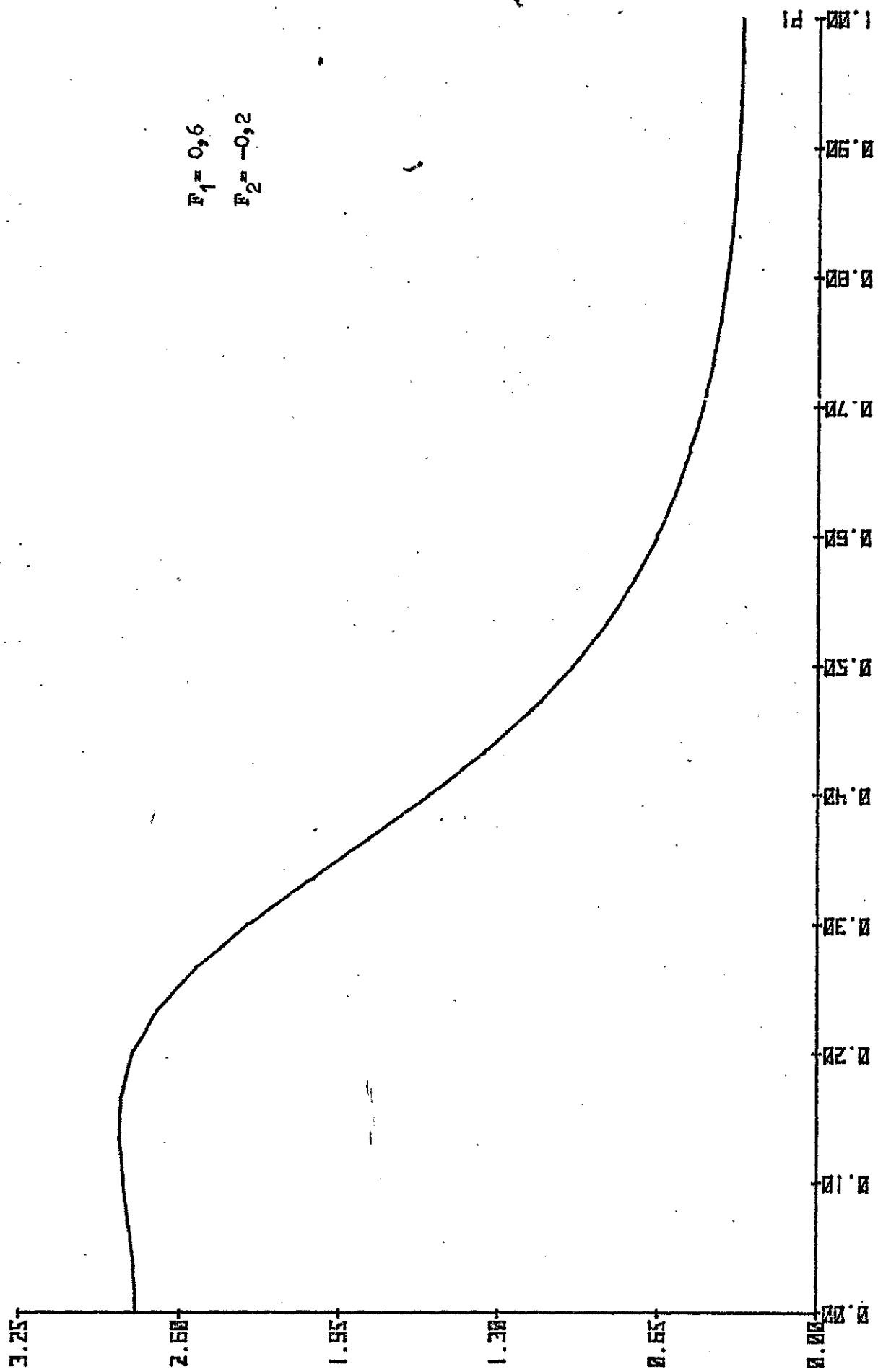
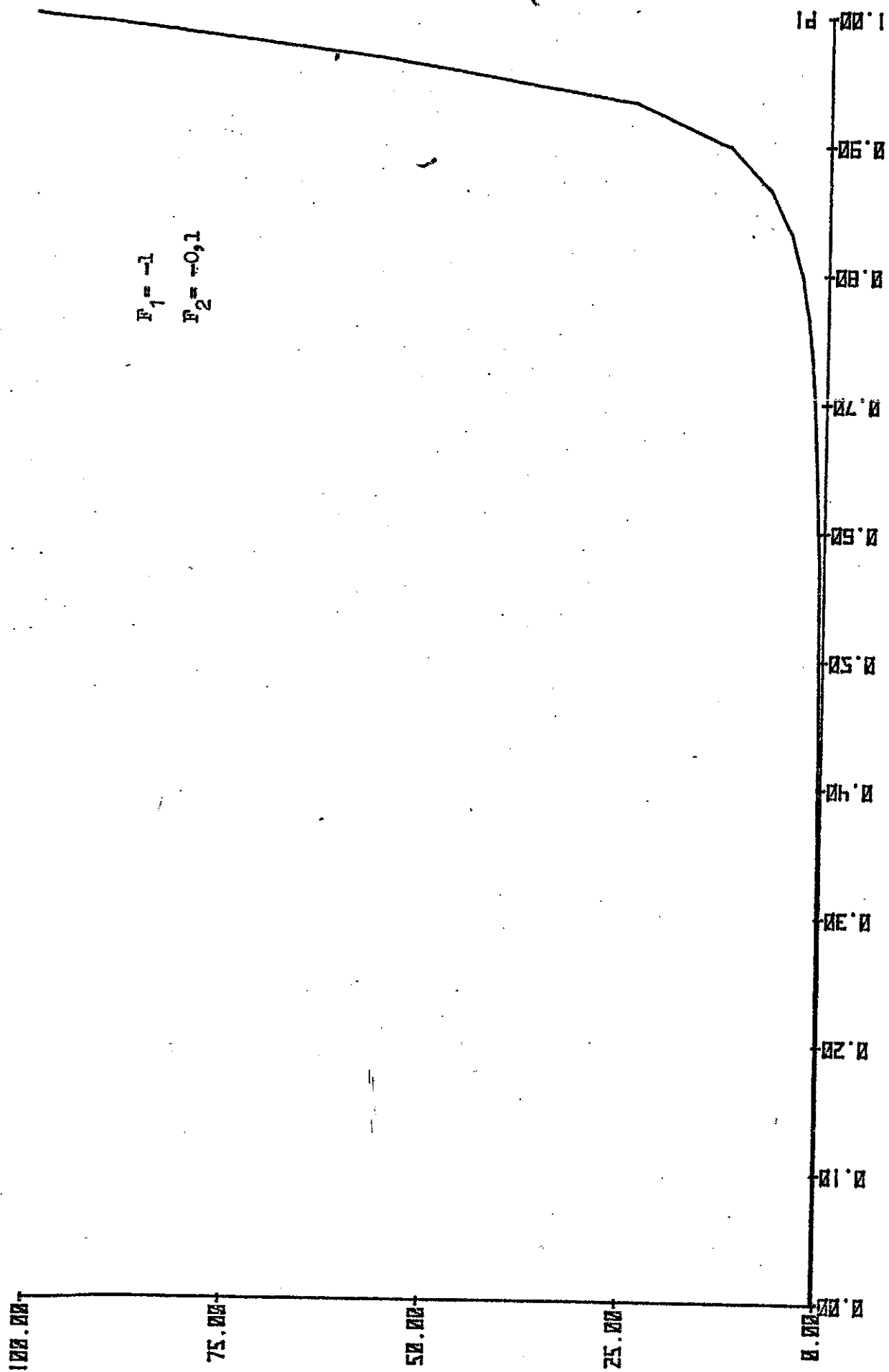
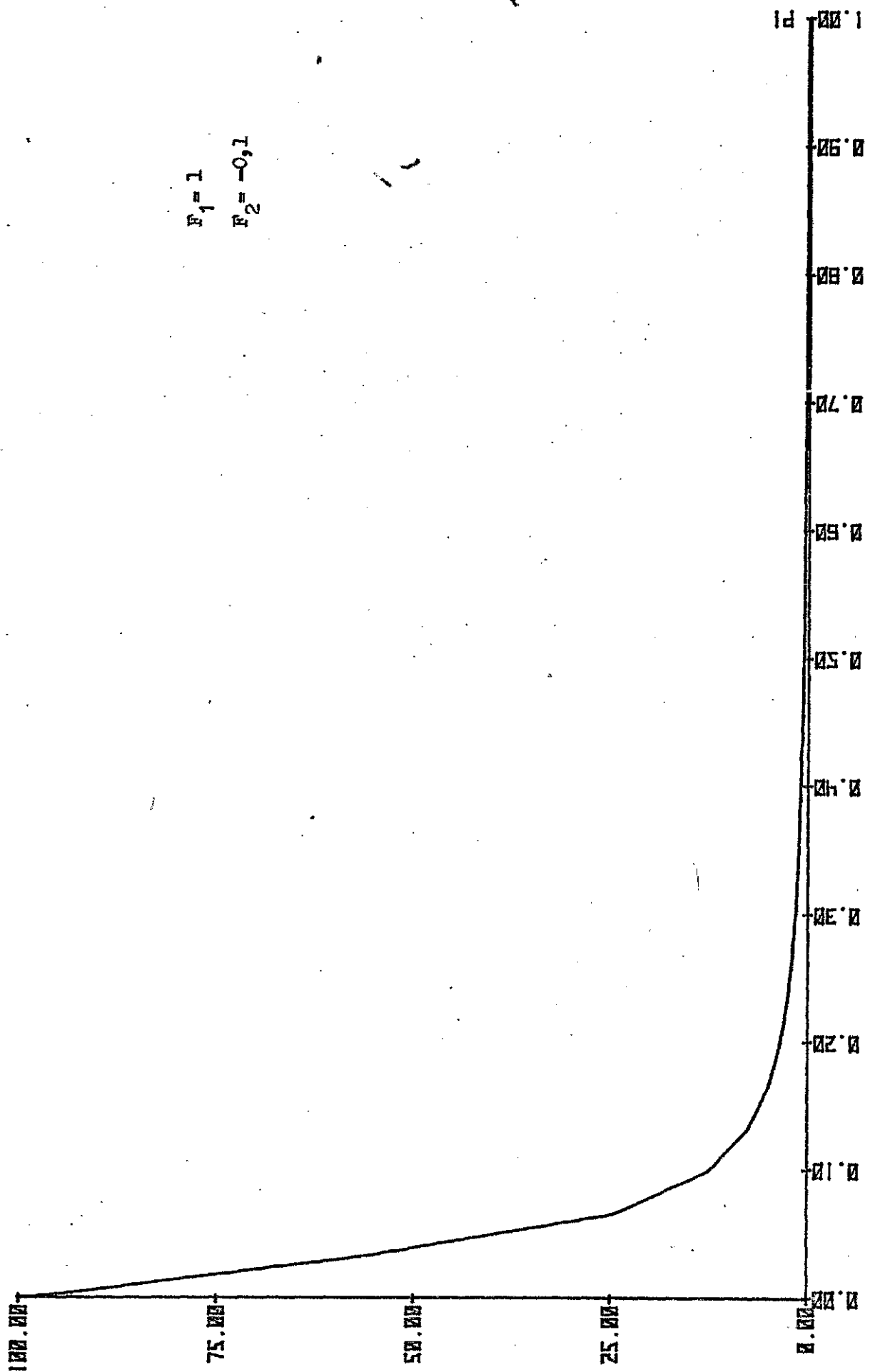


Gráfico 3-42



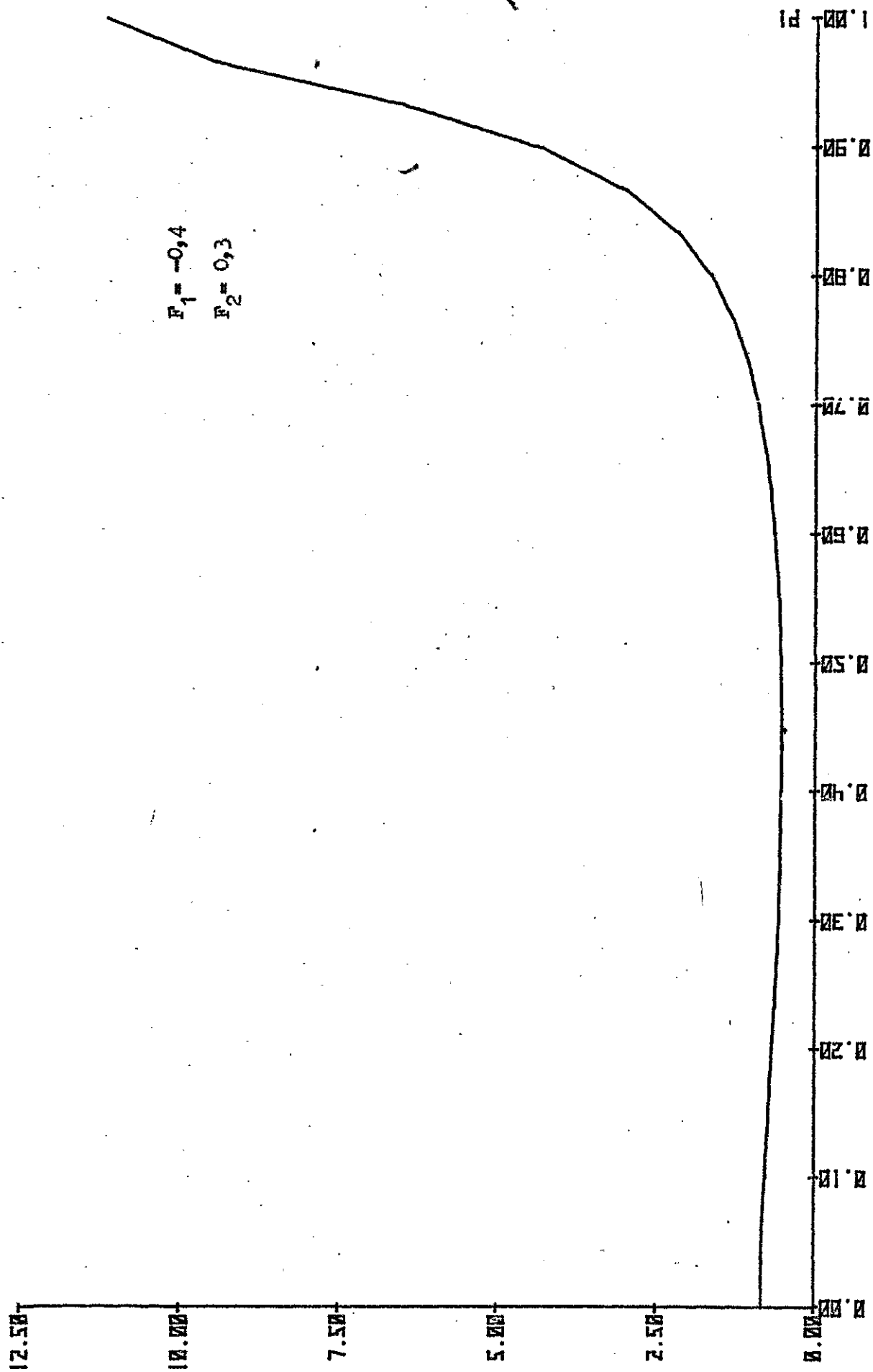




$$F_1 = 1$$

$$F_2 = -0.1$$

Gráfico 3-45



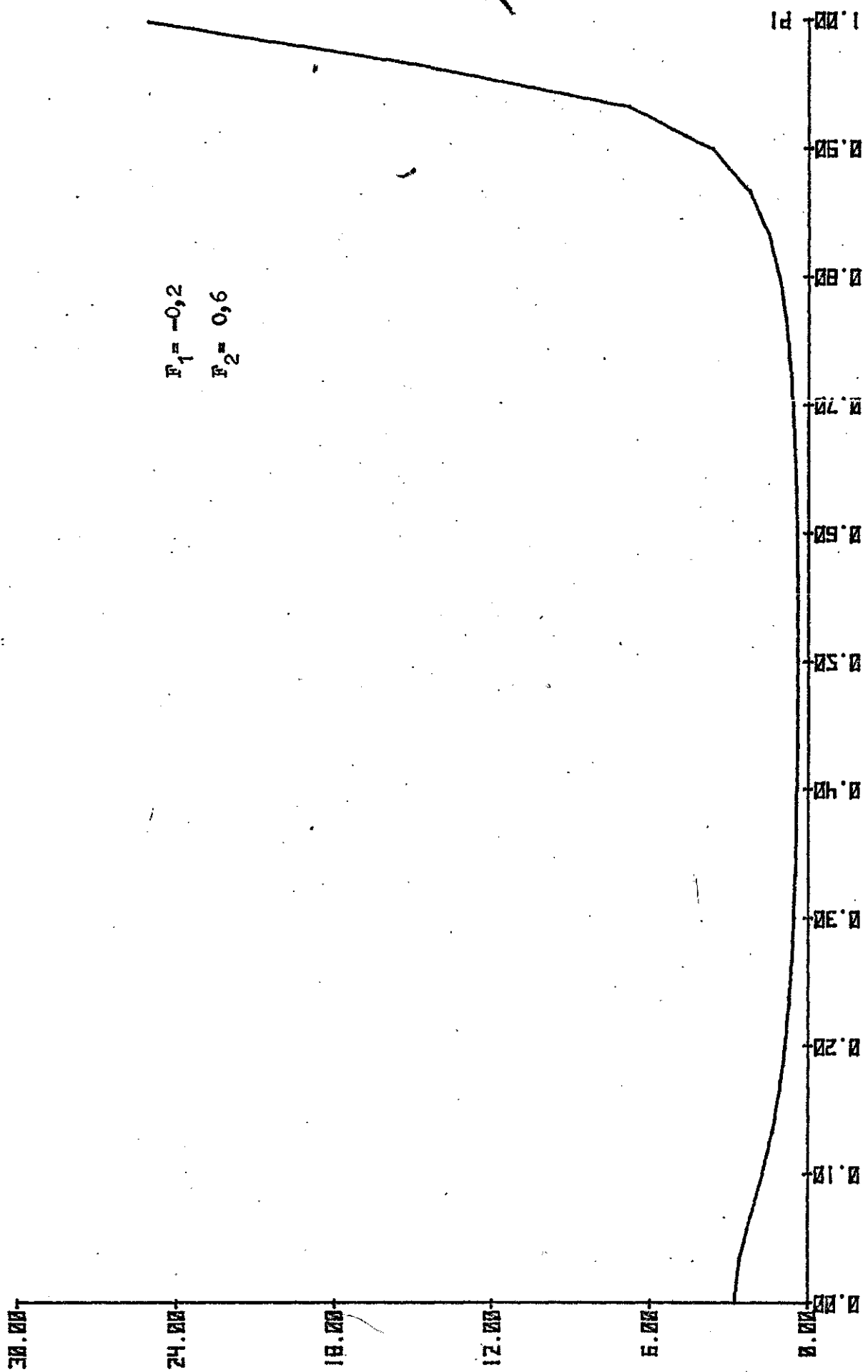
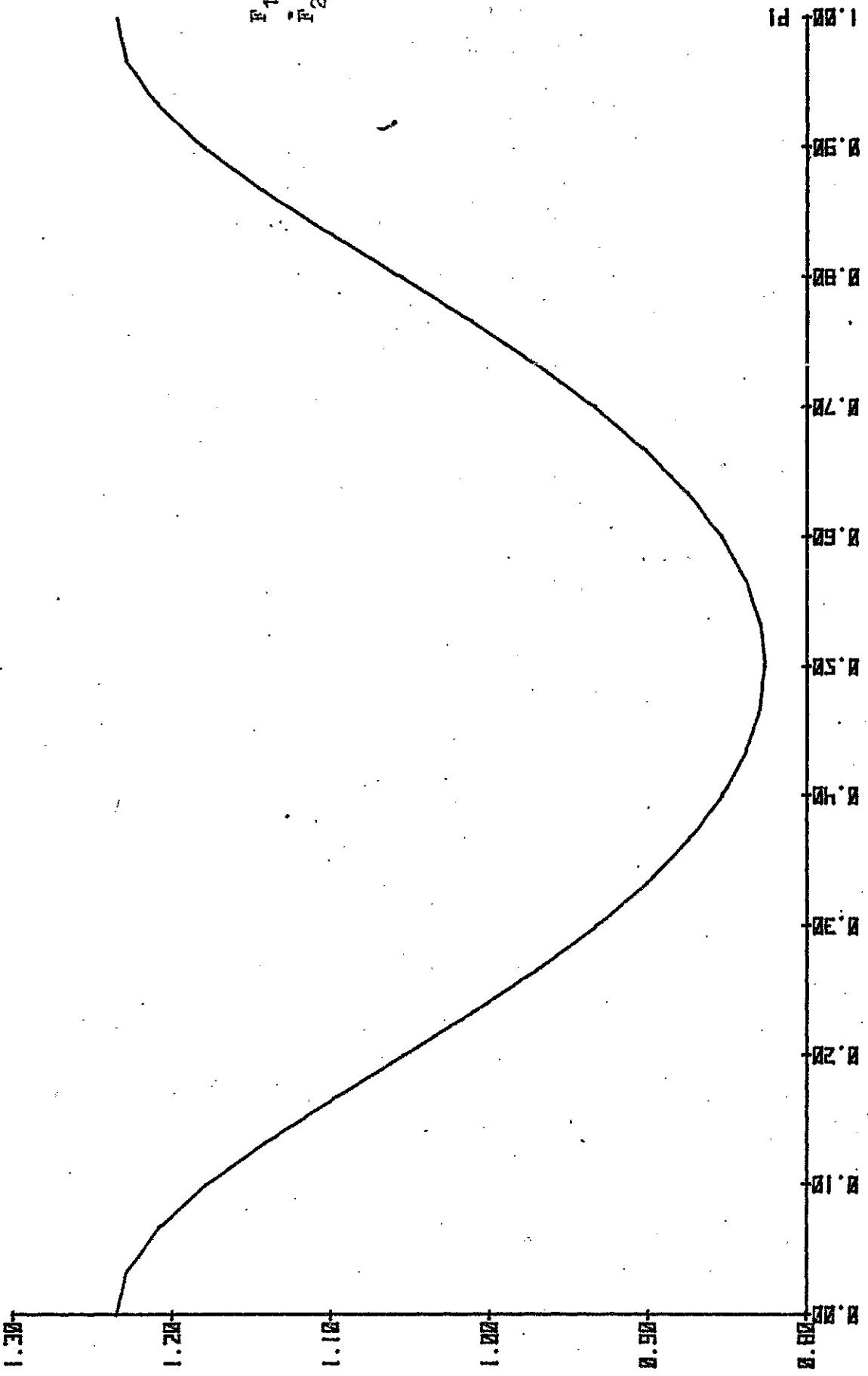


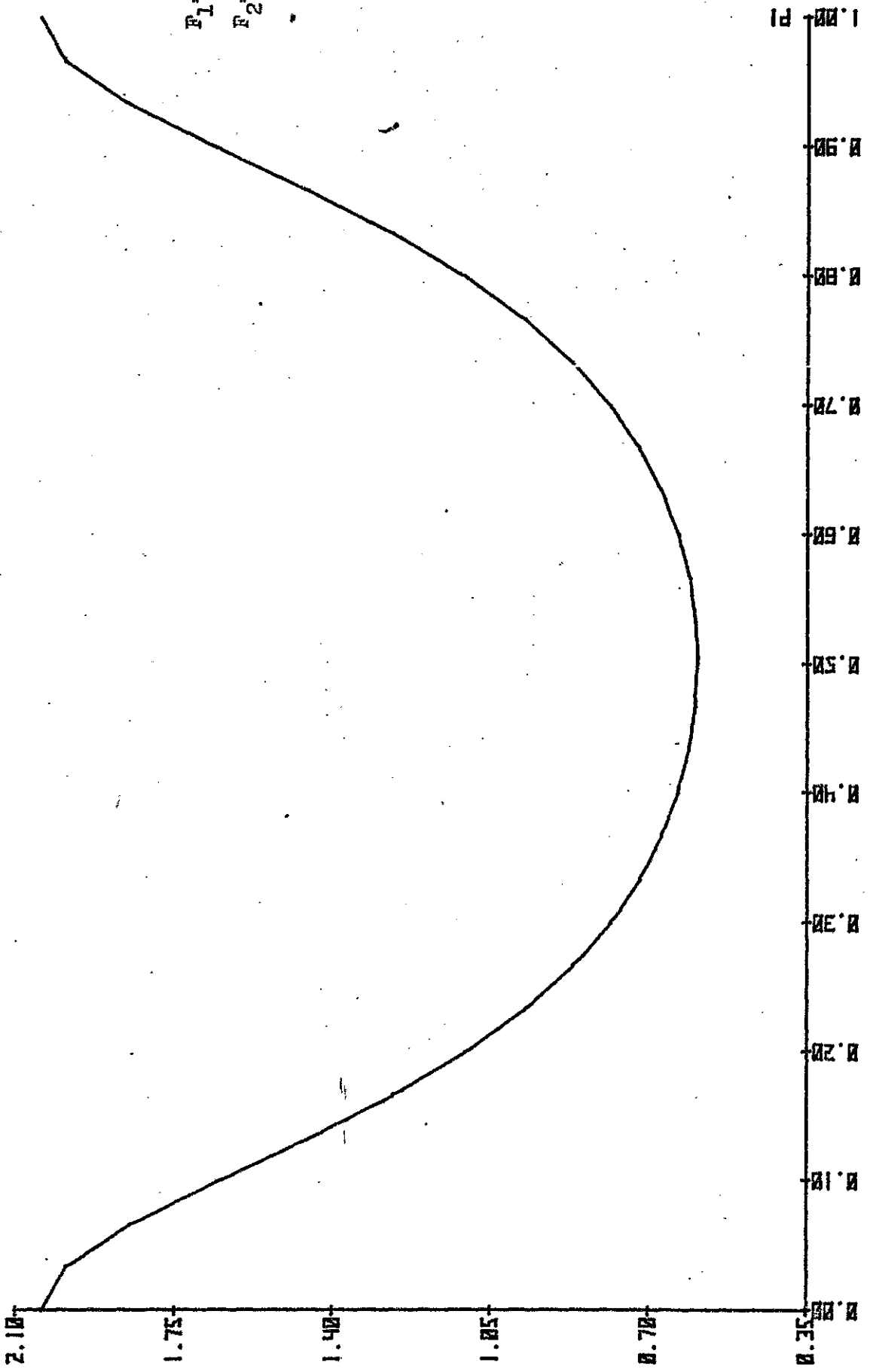
Gráfico 3-47

Gráfico 3-48



$F_1 = 0$
 $F_2 = 0.1$

Gráfico 3-49



$P_1 = 0$
 $P_2 = 0,3$

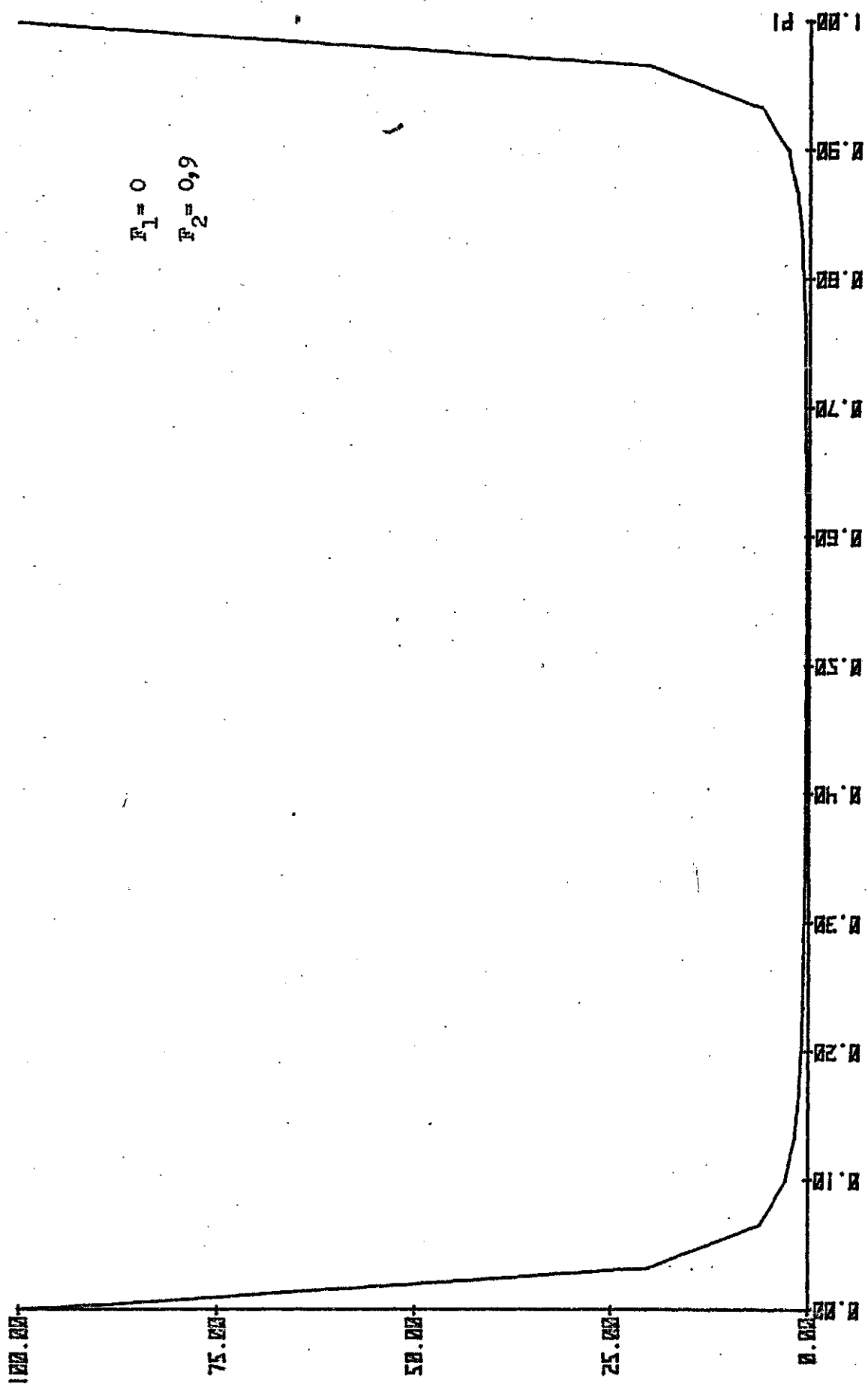
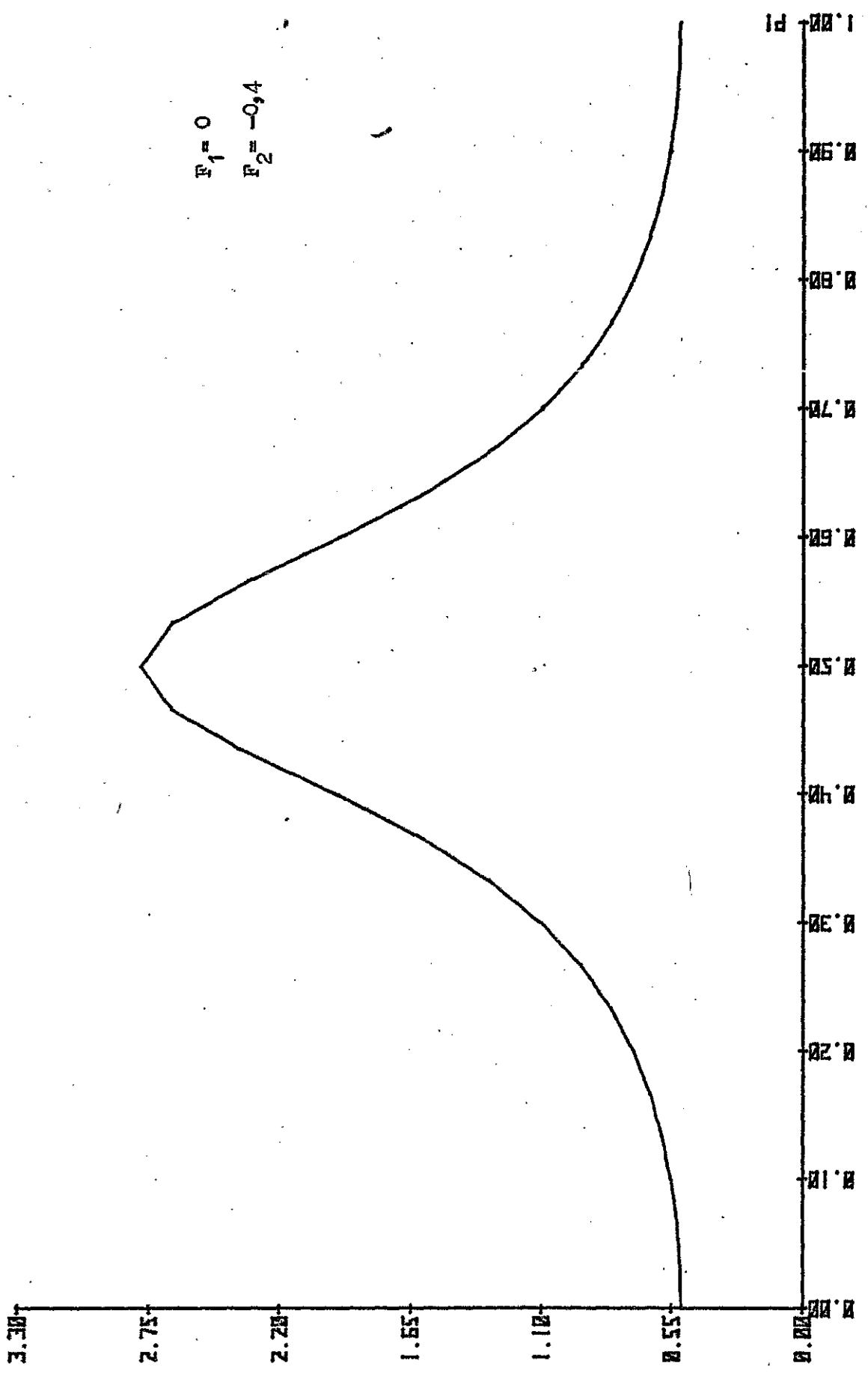


Gráfico 3-50

Gráfico 3-51



$F_1 = 0$
 $F_2 = -0.4$

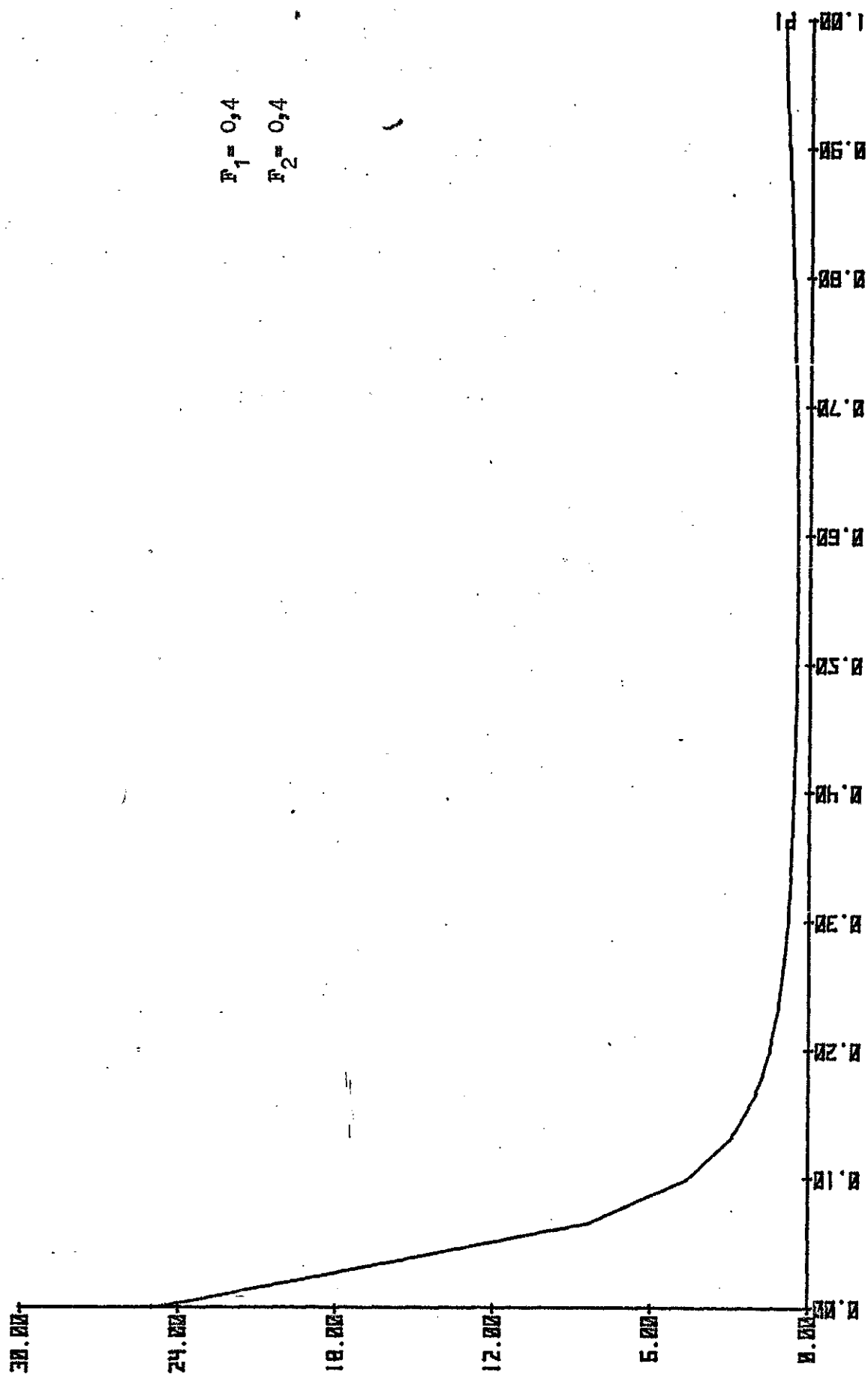
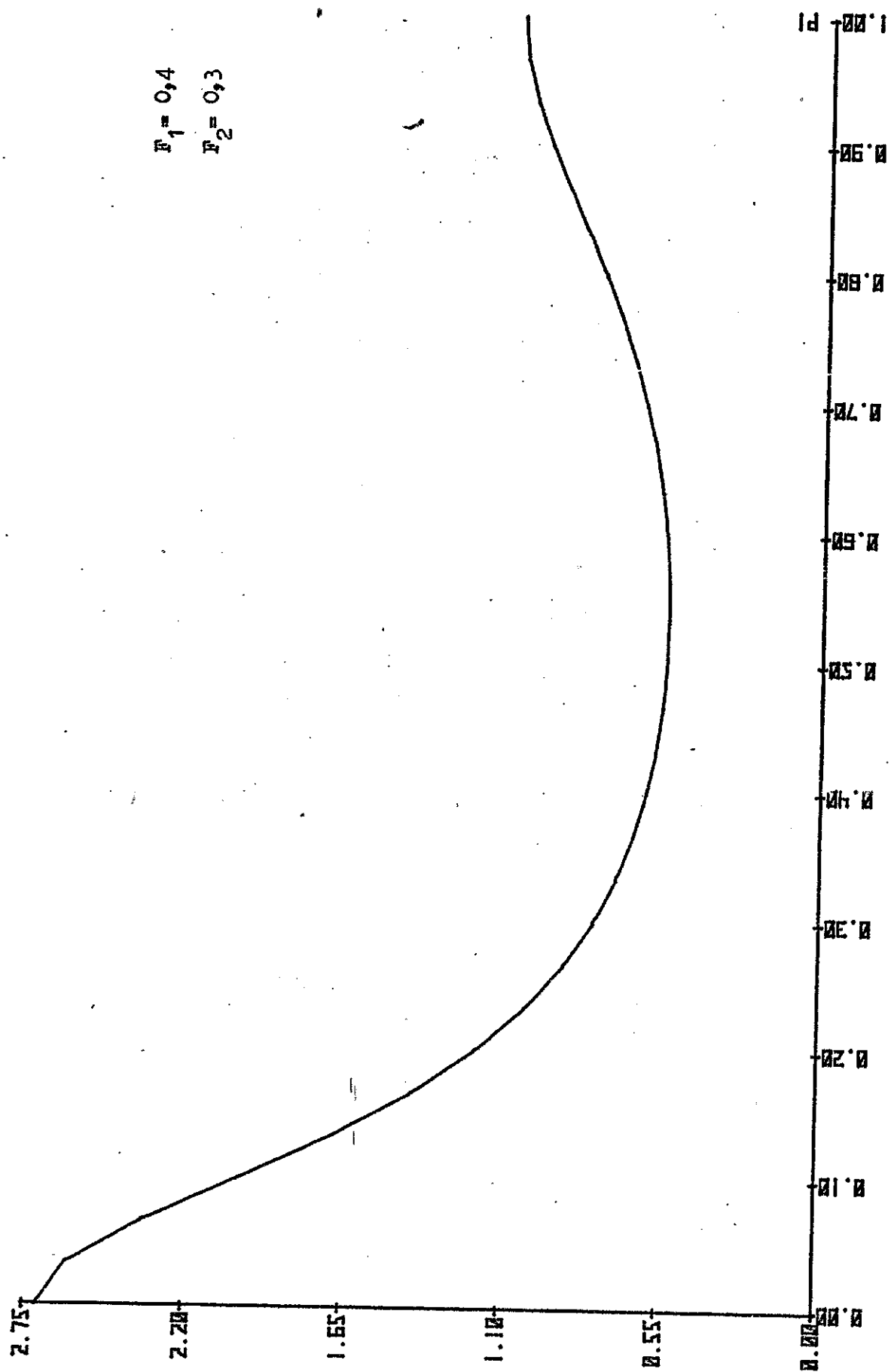
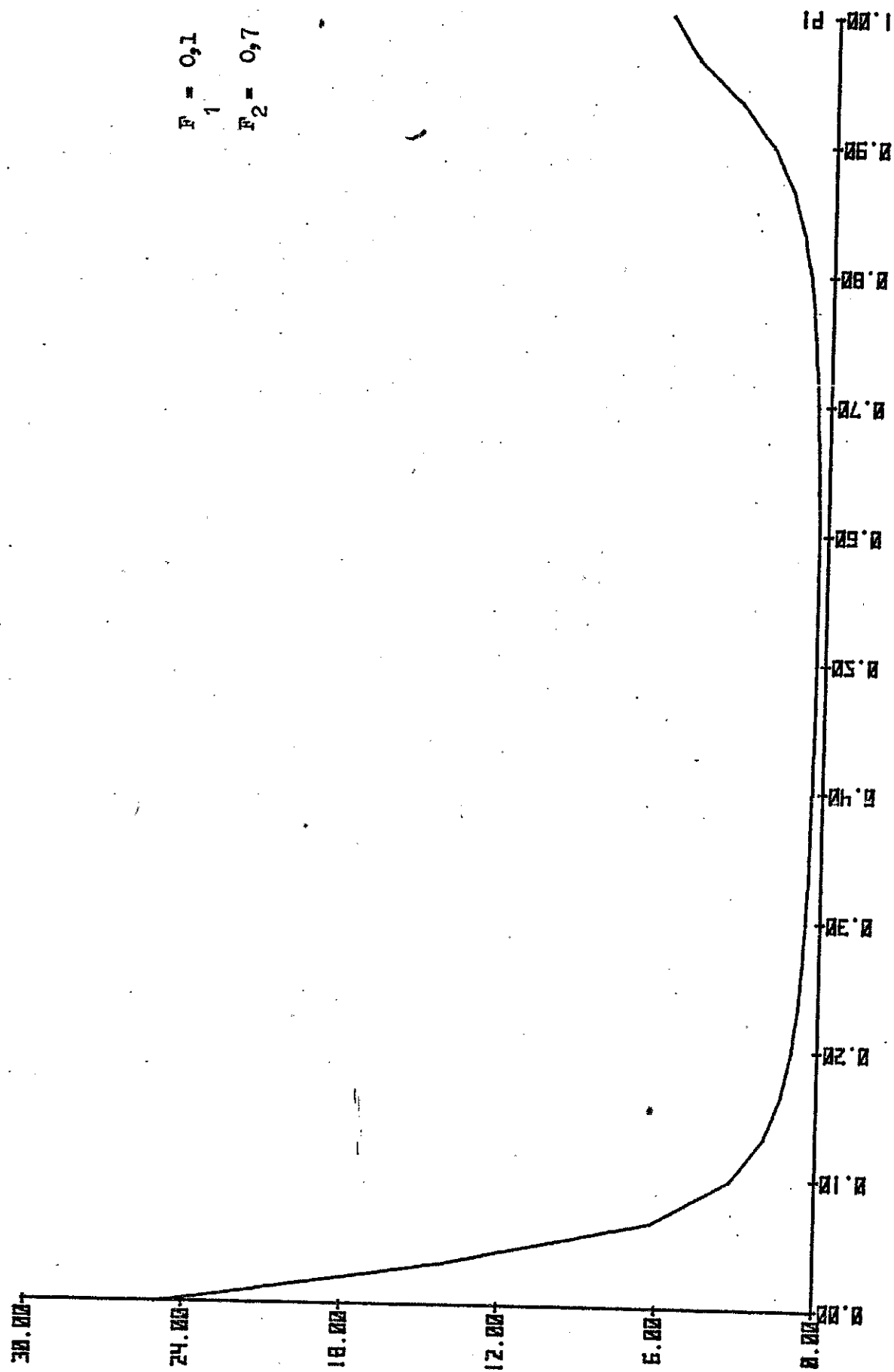


Gráfico 3-52



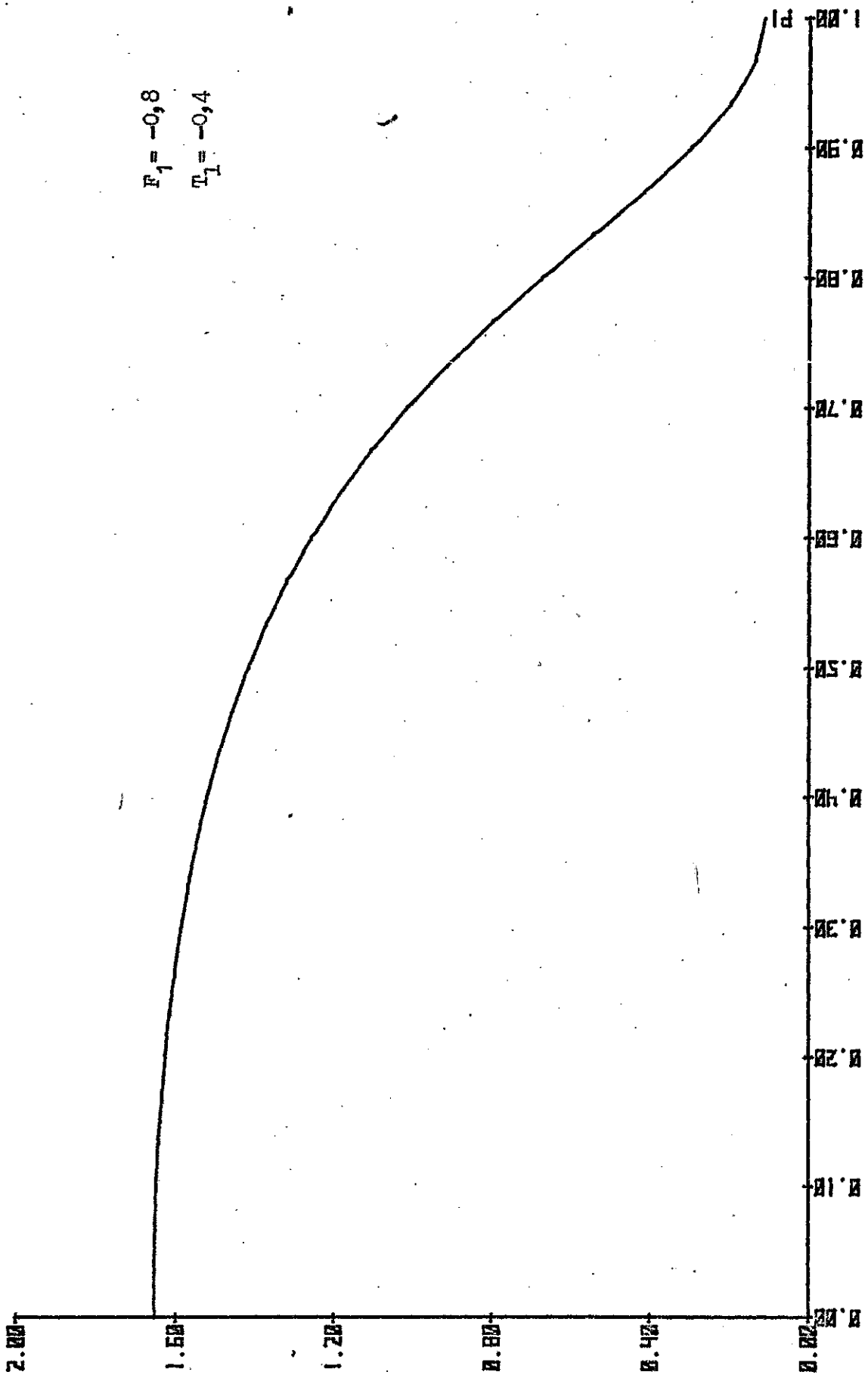
$F_1 = 0,4$
 $F_2 = 0,3$



$F_1 = 0,1$
 $F_2 = 0,7$

Gráfico 3-54

Gráfico 3-55



$$F_1 = -0,8$$
$$T_1 = -0,4$$

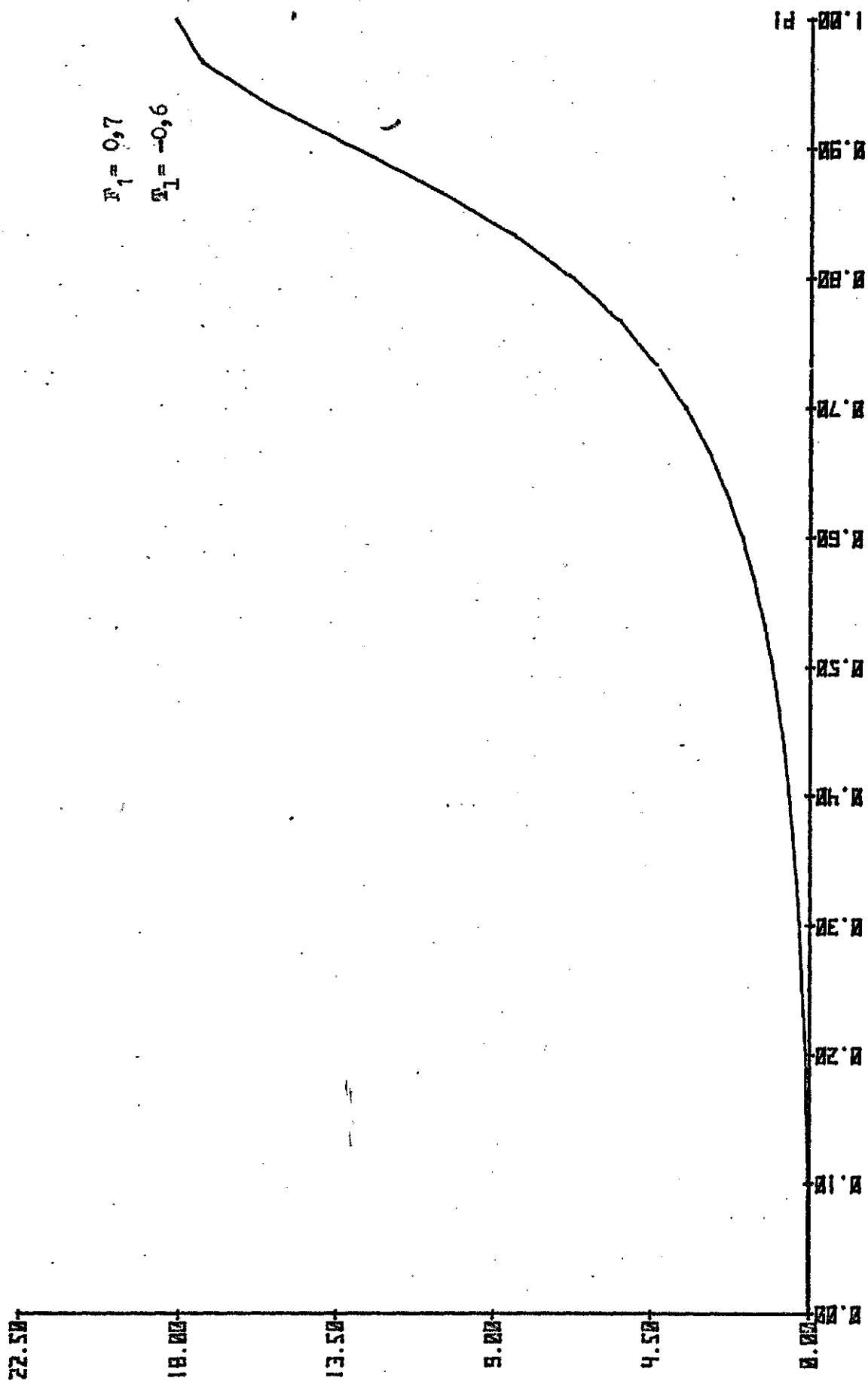


Gráfico 3-56

Gráfico 3-57

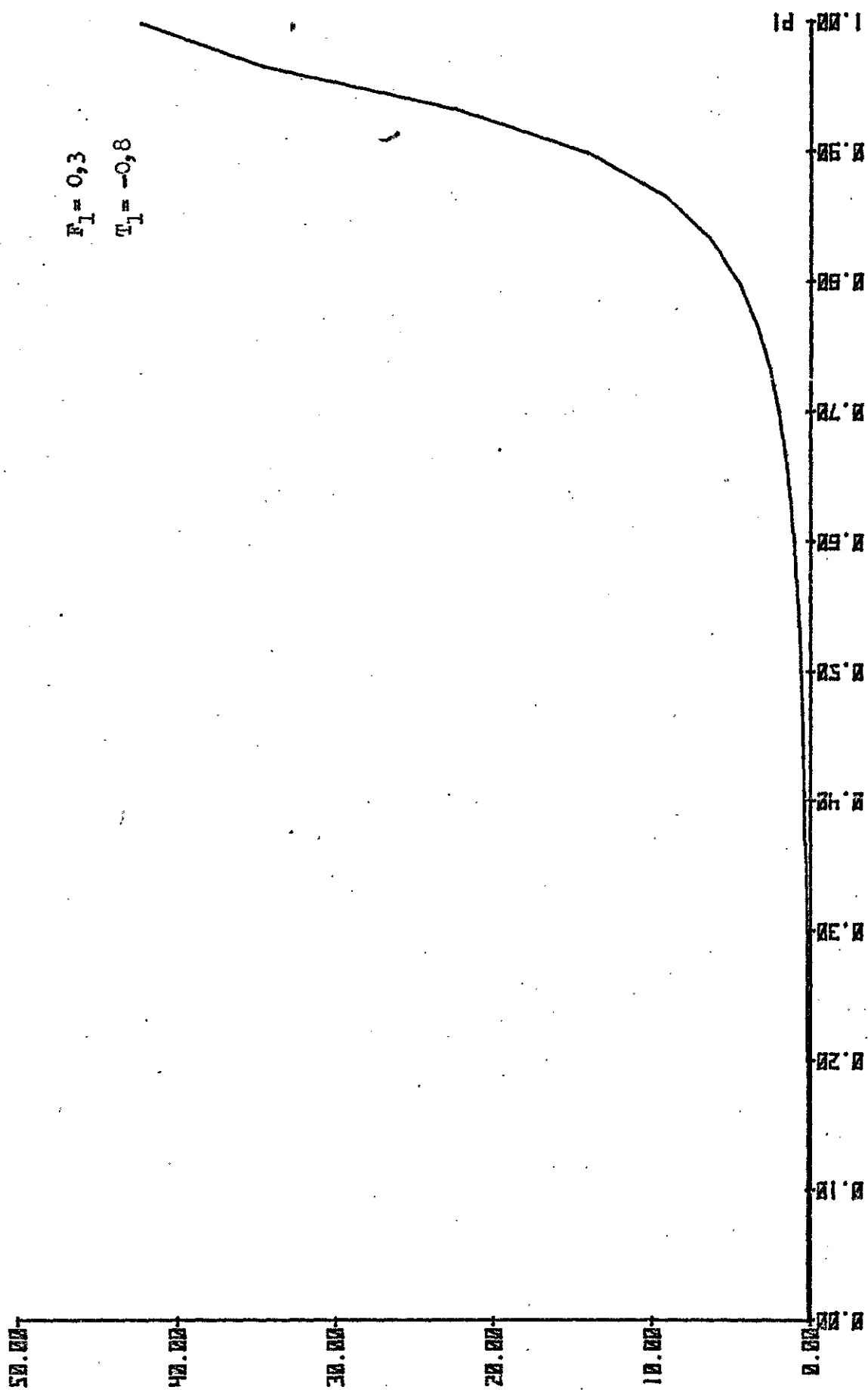


Gráfico 3-58

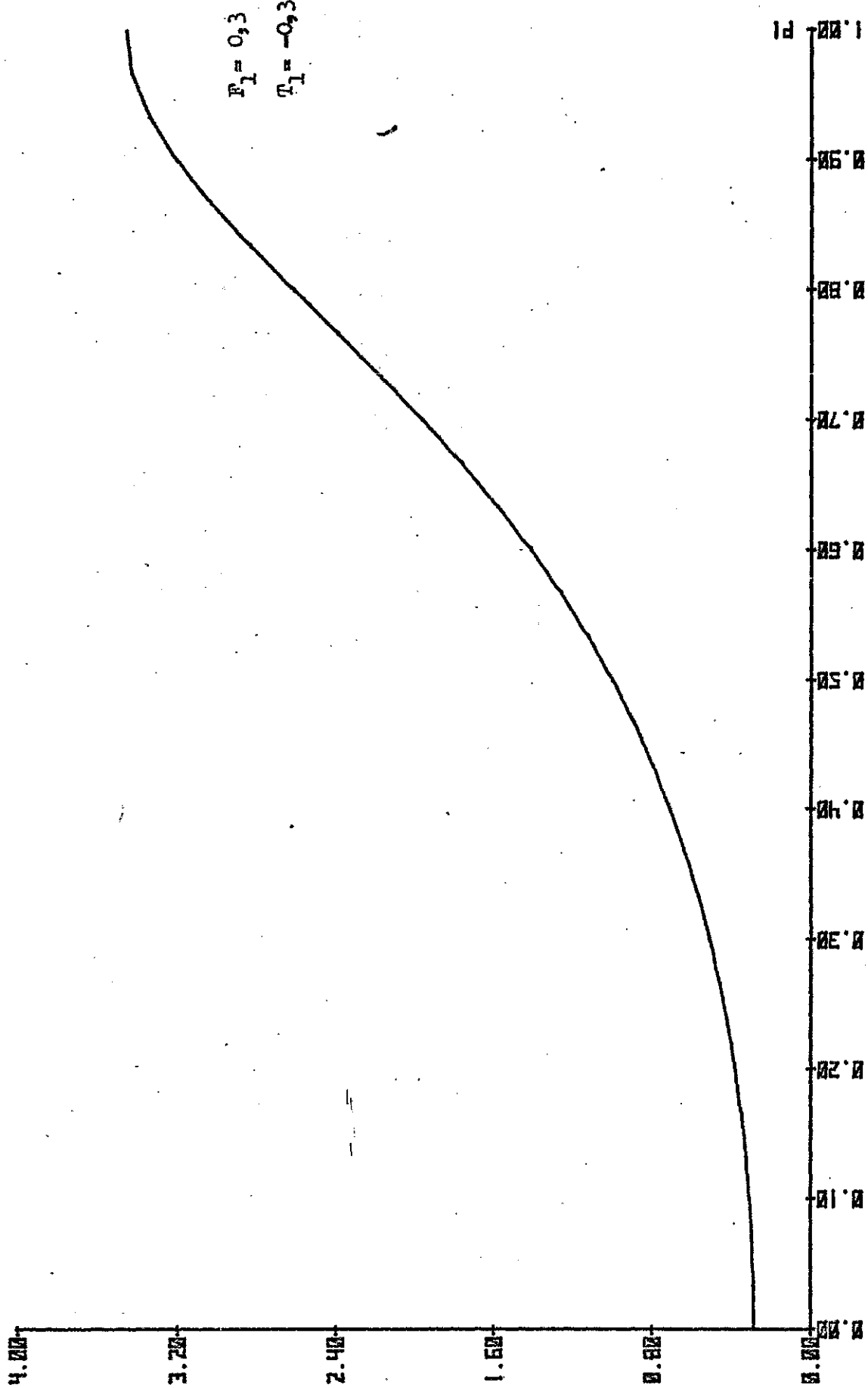
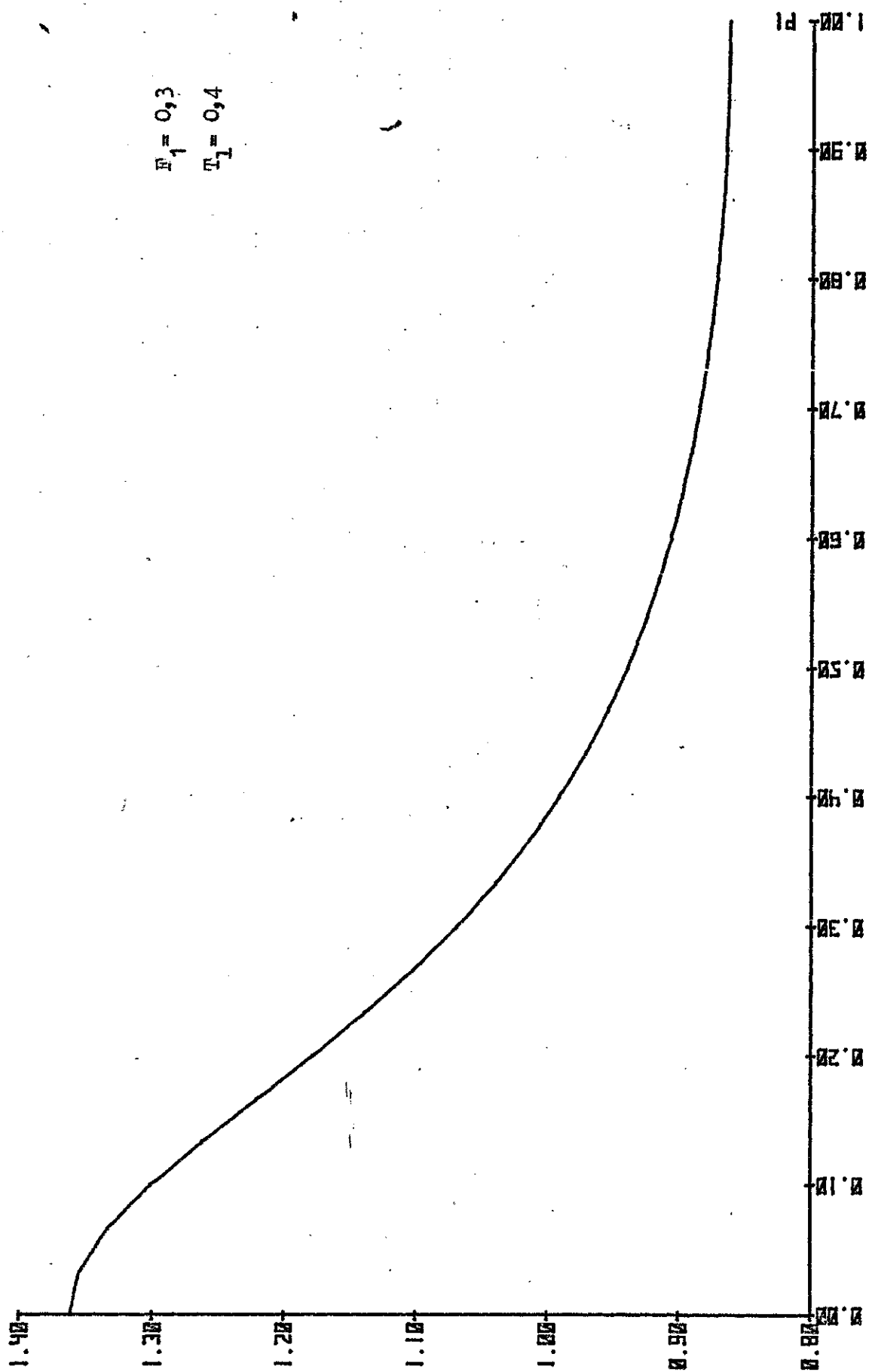
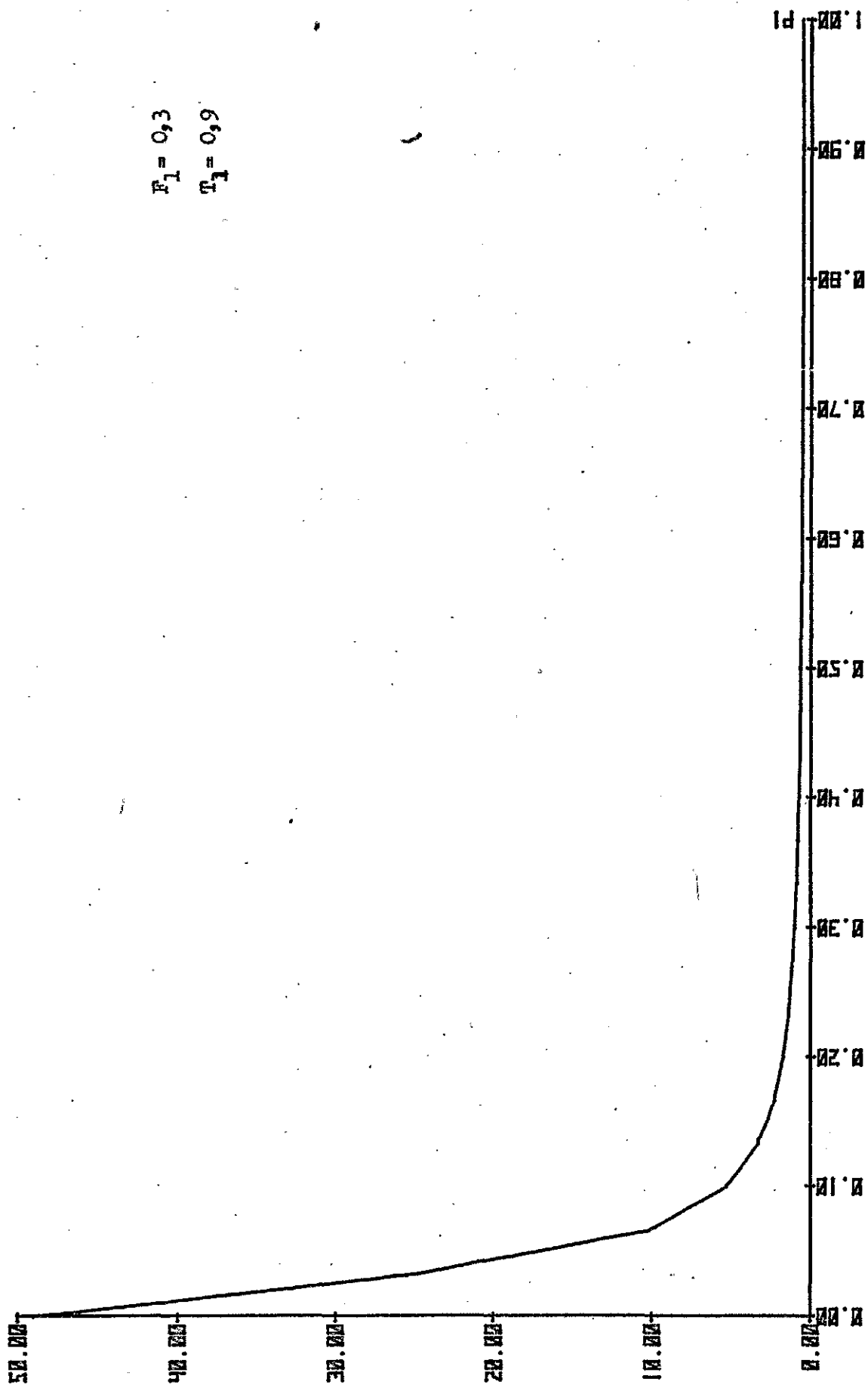


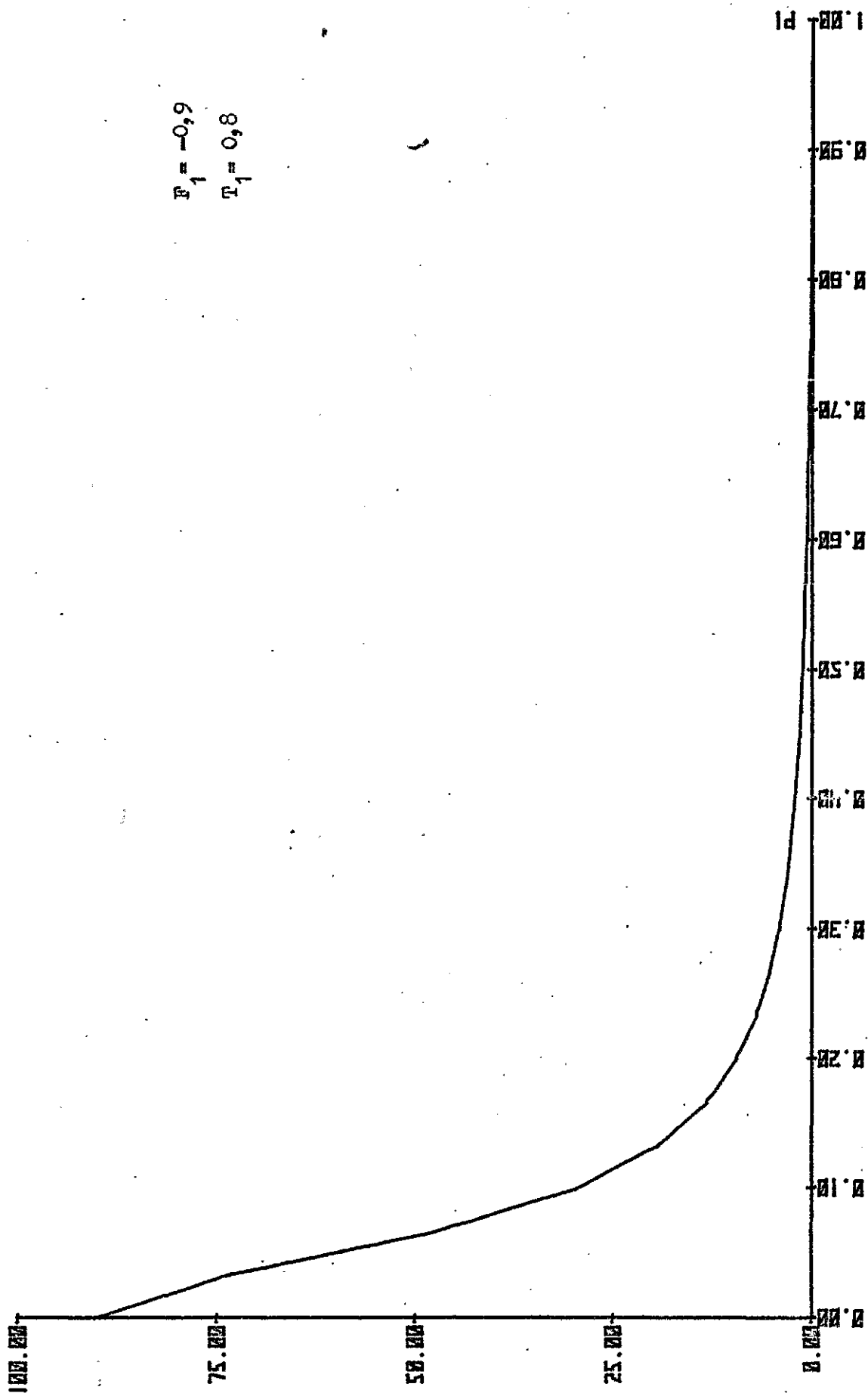
Gráfico 3-59





$F_1 = 0,3$
 $T_1 = 0,9$

Gráfico 3-60



$$P_1 = -0,9$$

$$T_1 = 0,8$$

Gráfico 3-61 361

Gráfico que relaciona los parámetros F_1 y F_2 de AR(2) con $R(1)$ y $R(2)$.

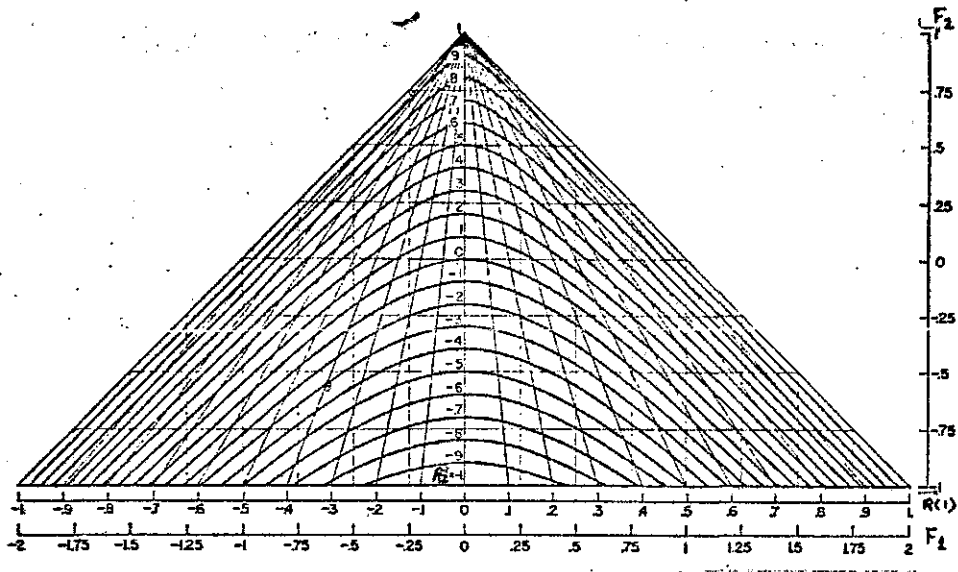


Gráfico 5-1

Gráfico que relaciona F_1 y F_2 con h . El segundo eje de abscisas relaciona $R(1)$ con la relación de ejes. En la parte superior se relaciona la forma de la zona de confianza con $R(1)$.

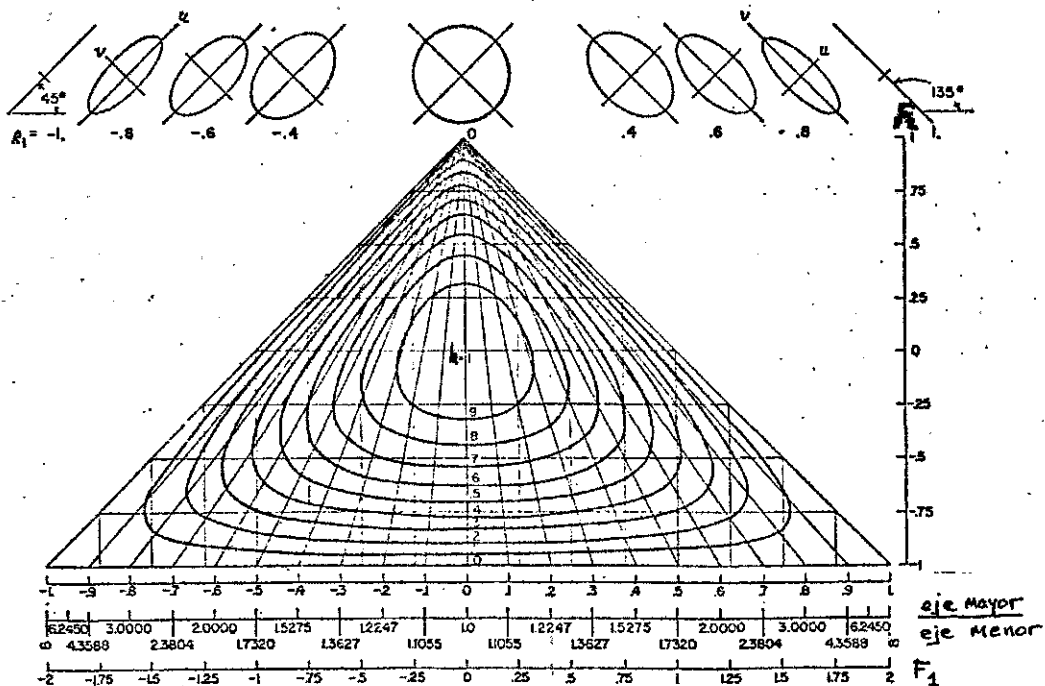


Gráfico 5-2

Longitud del eje menor para una zona de confianza del 95% en función de la relación $h/(1+r(1))$ y de N

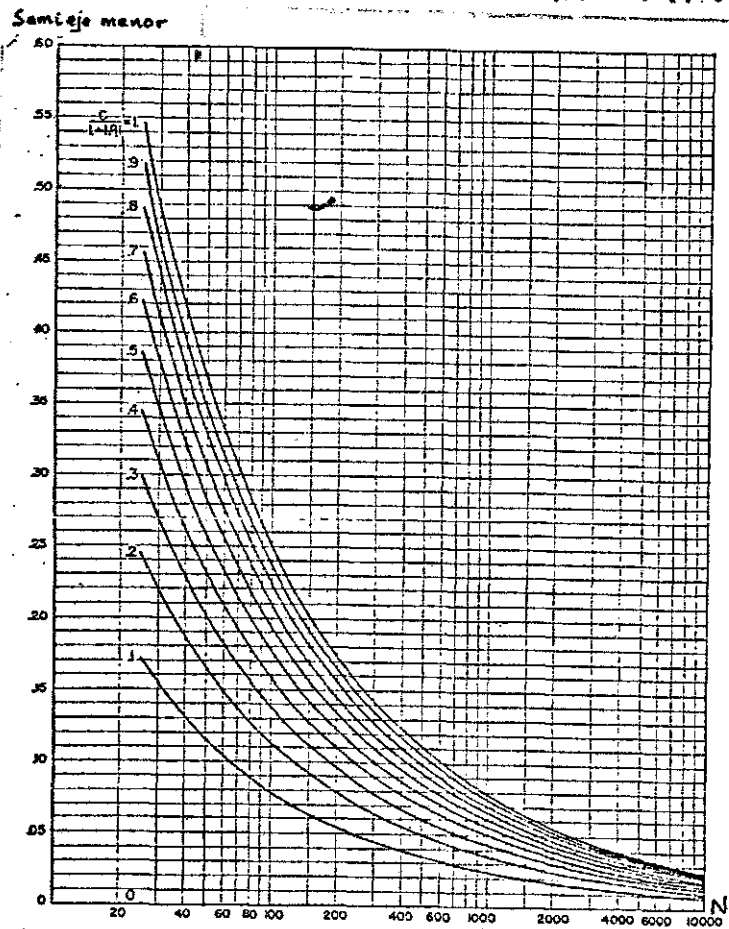
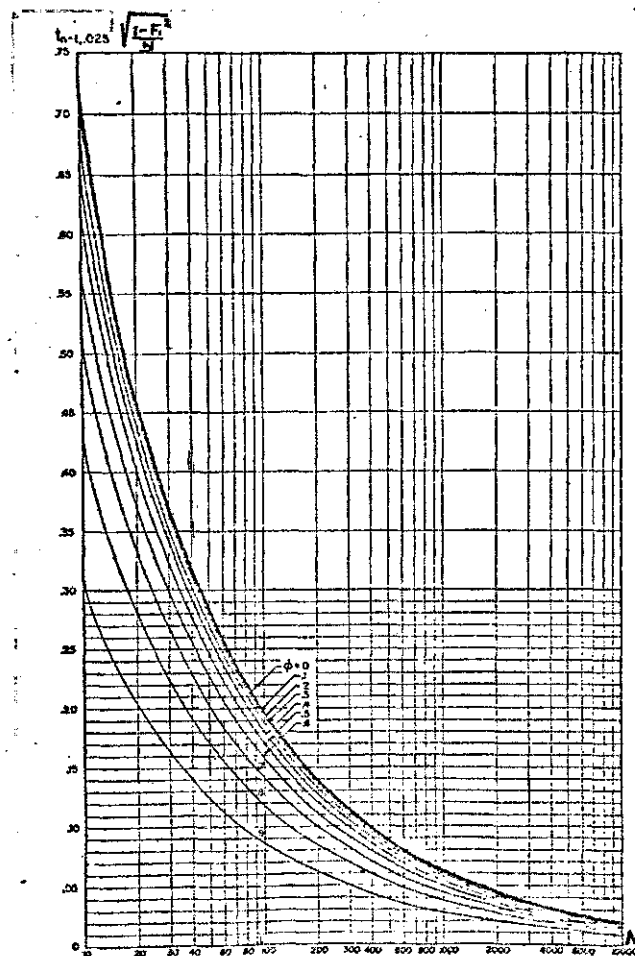


Gráfico 5-3



Semiintervalo de confianza $100(1 - \frac{\alpha}{2})\%$ Gráfico 5-4

Gráfico que relaciona los parámetros T_1 y T_2 de una $MV(2)$ con $R(1)$ y $R(2)$

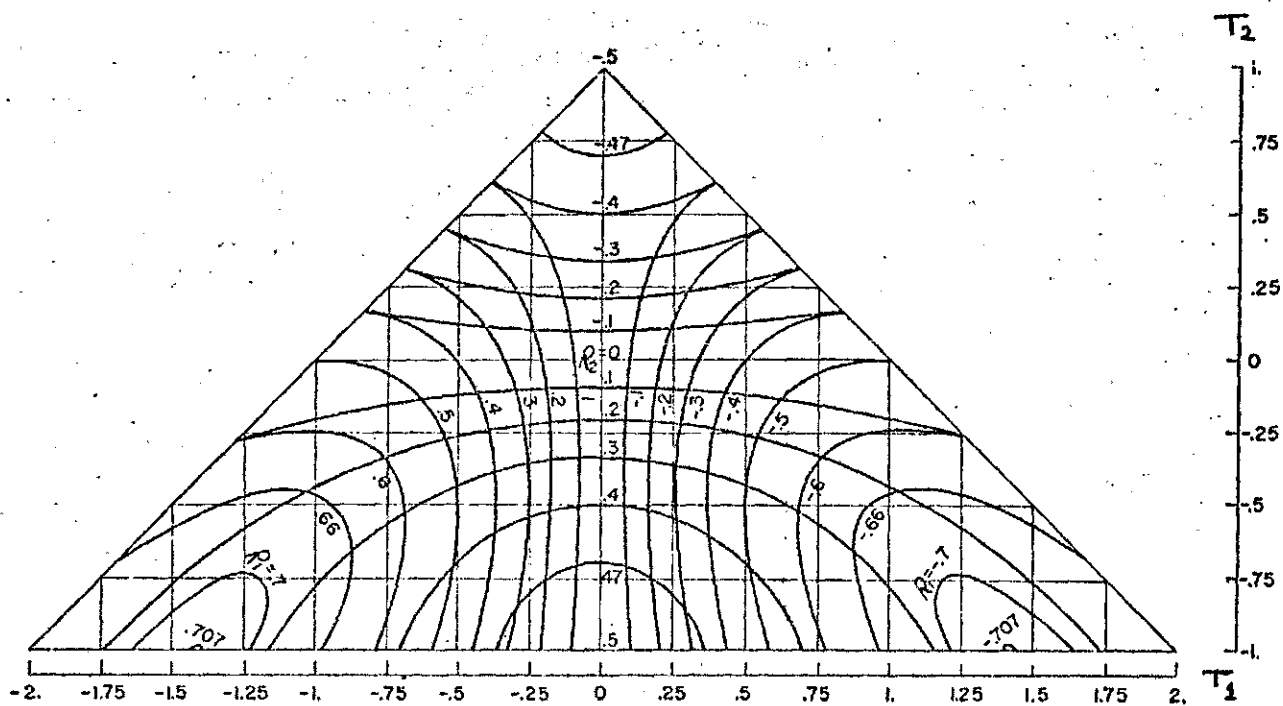


Gráfico 5-5

Relación entre los parámetros F_1 ; T_1 de una ARMA (1,1) con los $R(1)$ y $R(2)$

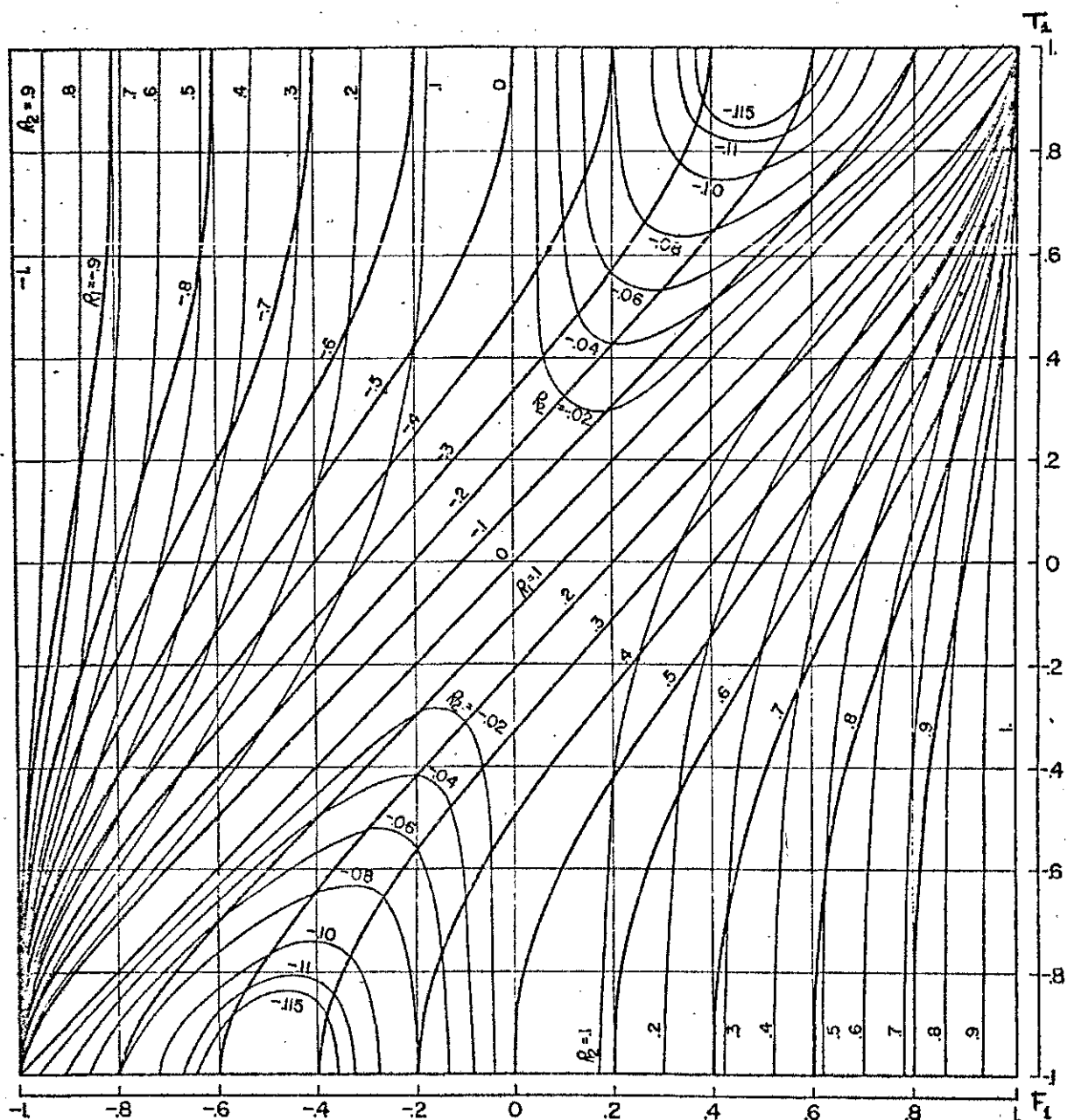


Gráfico 5-6

Gráfico para calcular el ángulo de rotación y la relación entre los ejes mayor y menor de las zonas de confianza de ARMA (1,1)

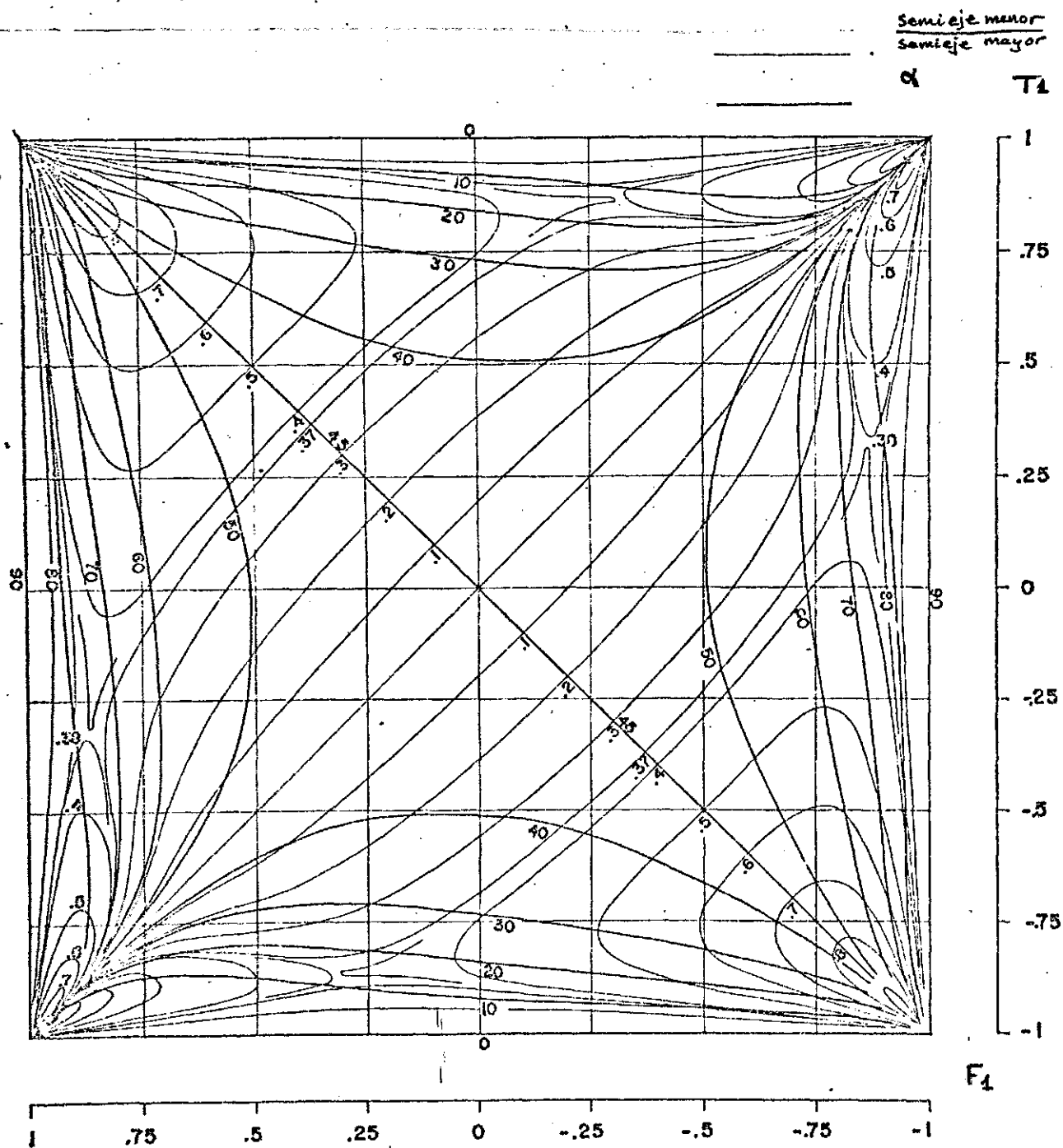


Gráfico 5-7

Variable ΔIPM

$g(f)$

11

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

0.034

0.063

0.094

0.125

0.156

0.188

0.249

0.250

0.281

0.343

0.344

0.375

0.406

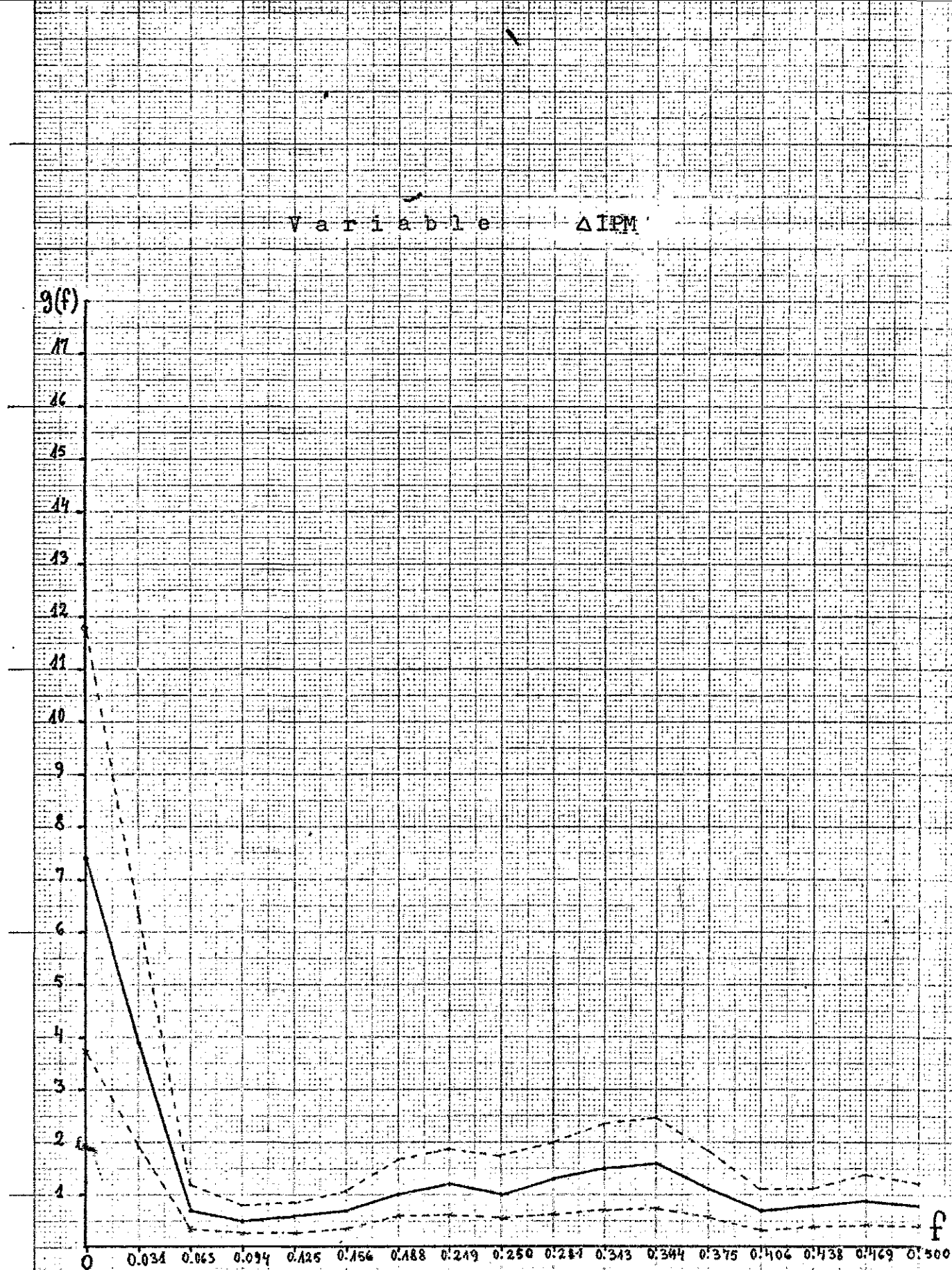
0.438

0.469

0.500

f

Gráfico 6-1



Variable $\Delta IPAT$

$g(f)$

17

16

15

14

13

12

11

10

9

8

7

6

5

4

3

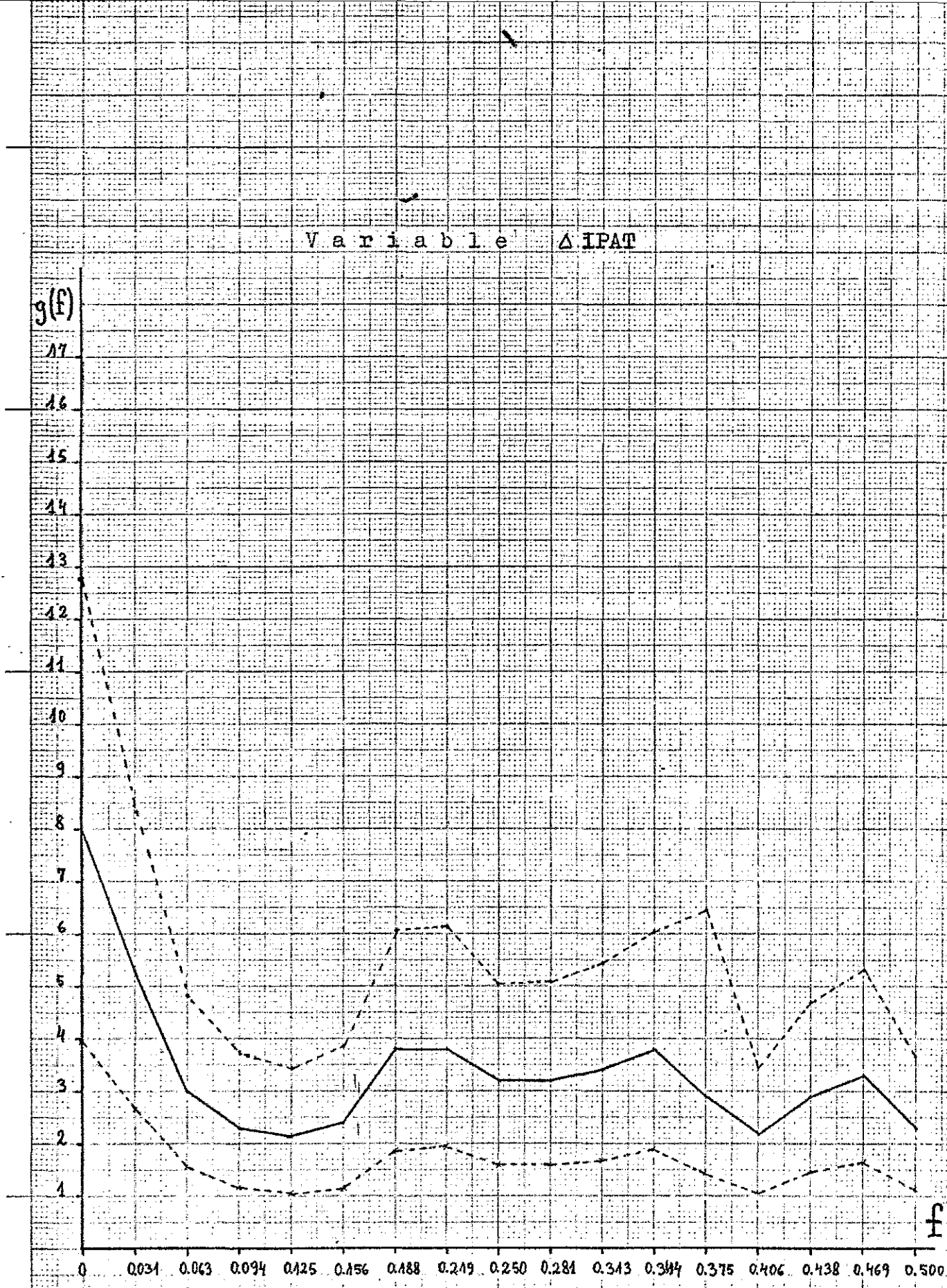
2

1

f

0 0.031 0.063 0.094 0.125 0.156 0.188 0.219 0.250 0.281 0.313 0.344 0.375 0.406 0.438 0.469 0.500

Gráfico 6-2



Variable $\Delta IPPA$

$g(f)$

17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

0 0.031 0.063 0.094 0.125 0.156 0.188 0.219 0.250 0.281 0.313 0.344 0.375 0.406 0.438 0.469 0.500

f

Gráfico 6-3

Variable $\Delta IPAI$



Gráfico 6-4

Variable ΔICV

$g(f)$

17

16

15

14

13

12

11

10

9

8

7

6

5

4

3

2

1

0

0.031

0.063

0.094

0.125

0.156

0.188

0.219

0.250

0.281

0.313

0.344

0.375

0.406

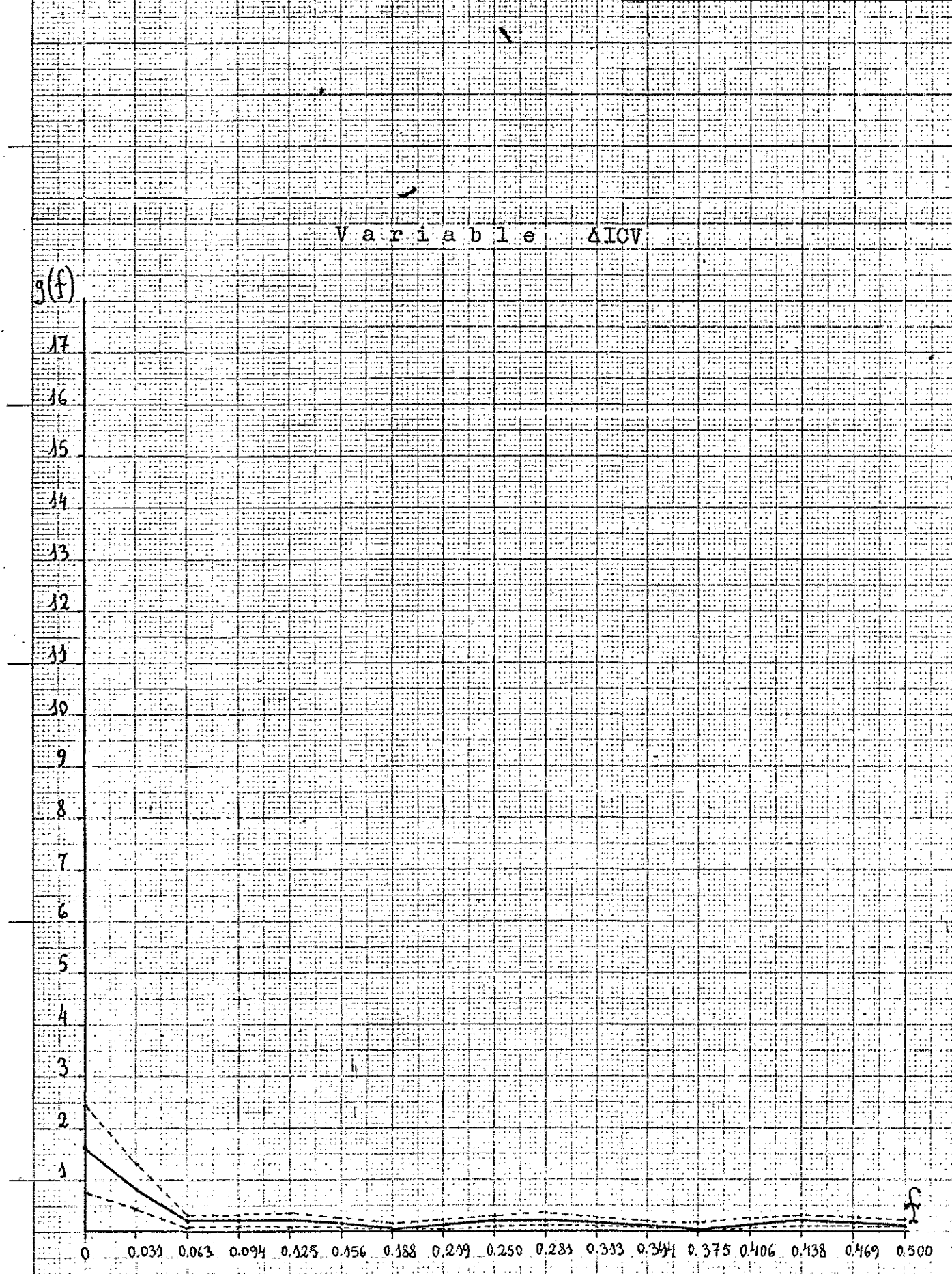
0.438

0.469

0.500

f

Gráfico 6 - 5



Variable $\Delta ICVA$

$g(f)$

8

7

6

5

4

3

2

1

0

0,031

0,063

0,094

0,125

0,156

0,188

0,219

0,250

0,281

0,313

0,344

0,375

0,406

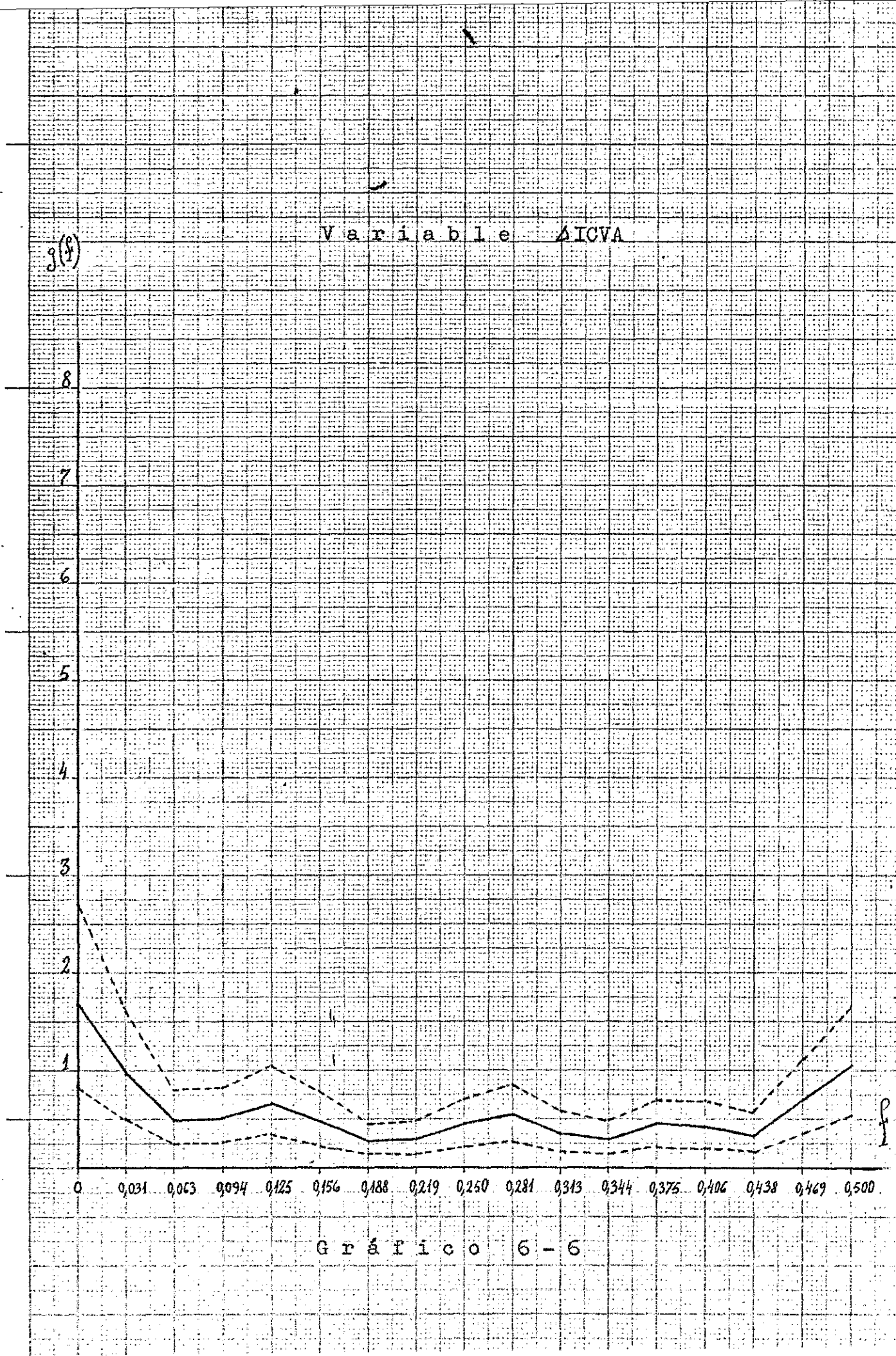
0,438

0,469

0,500

f

Gráfico 6-6



3455

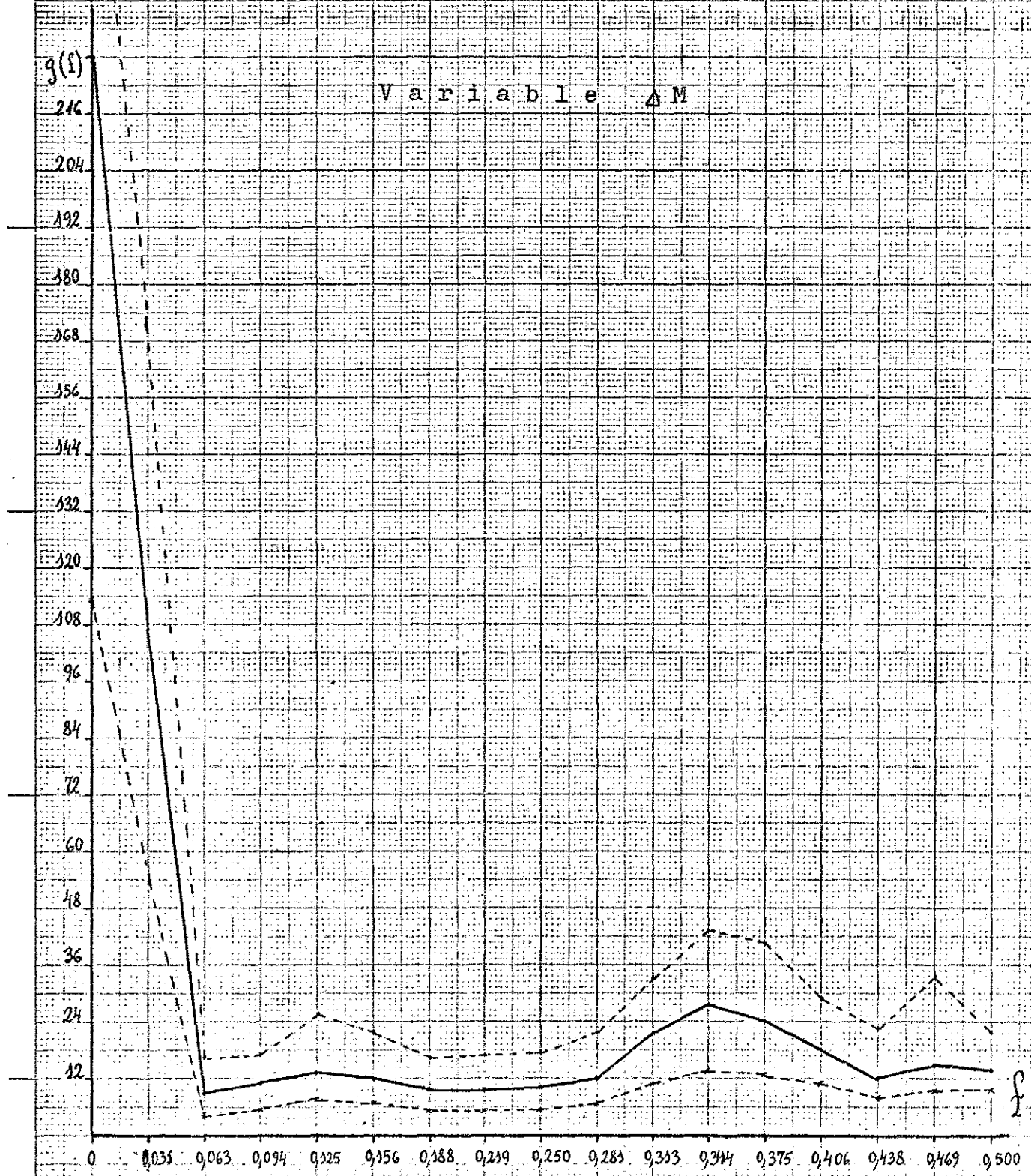


Gráfico 6.7

Variable ΔIPI

$g(\xi)$

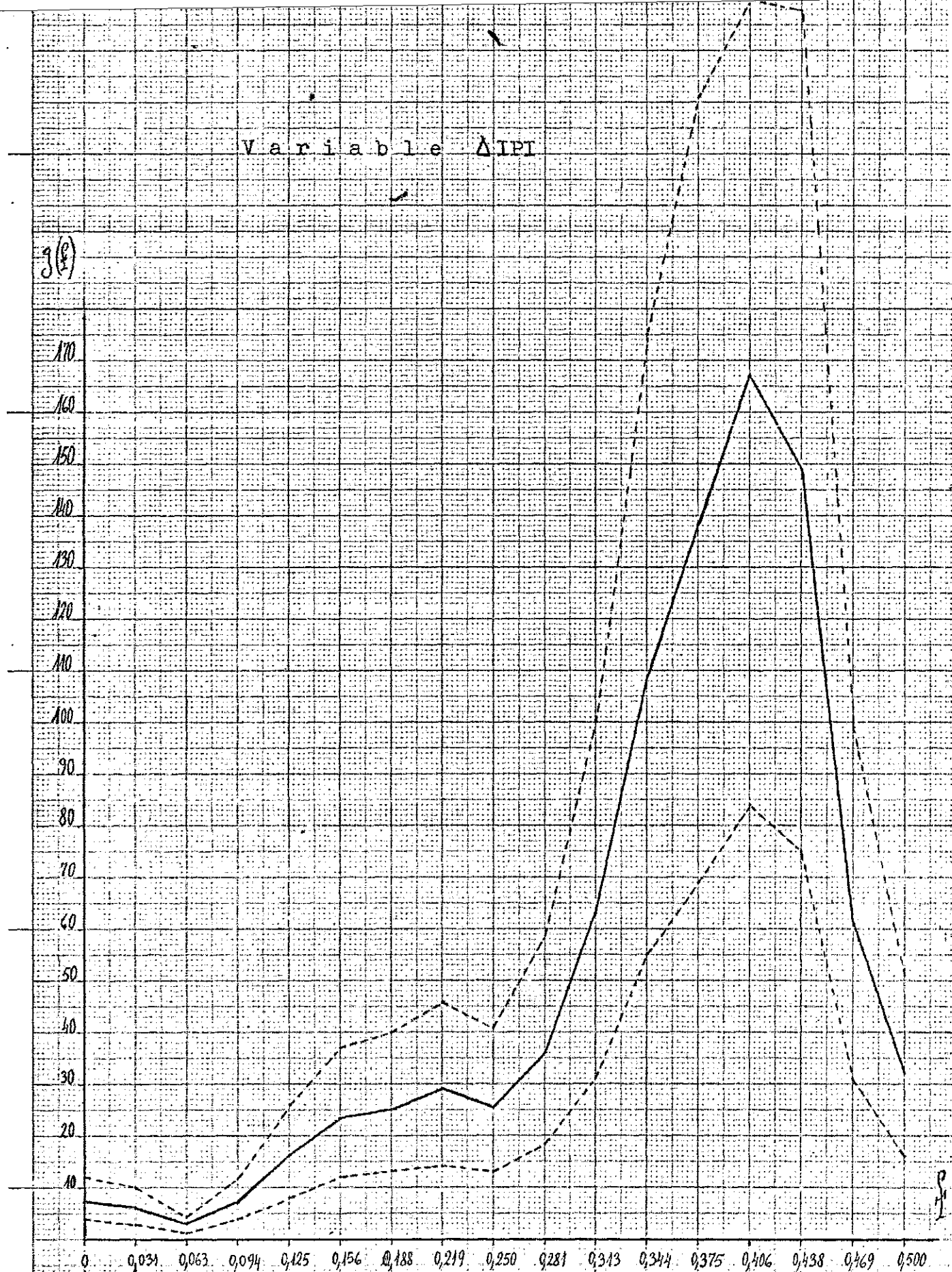


Gráfico 6-8

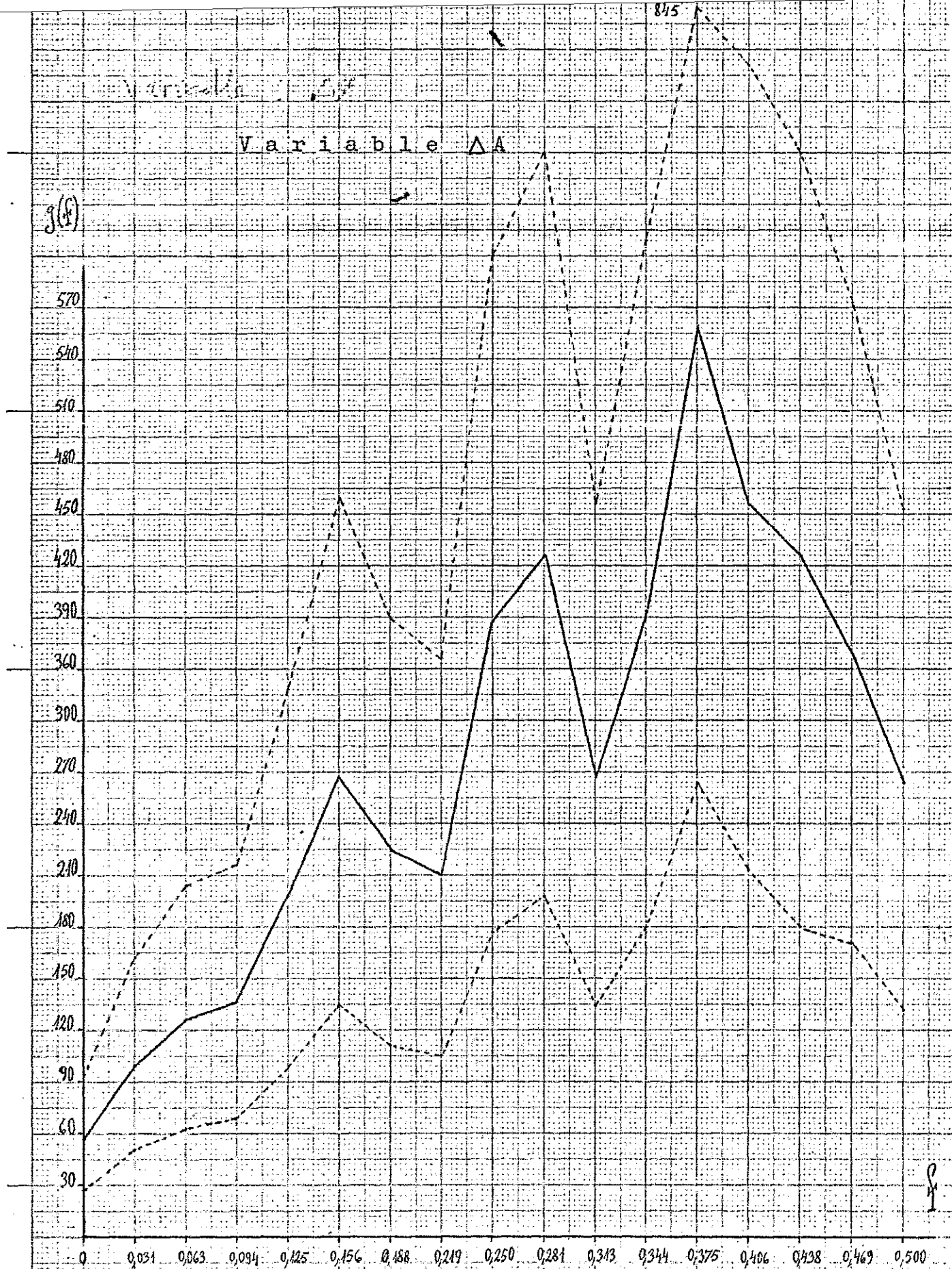


Gráfico 6-9

18.343 98

Variable ΔEE

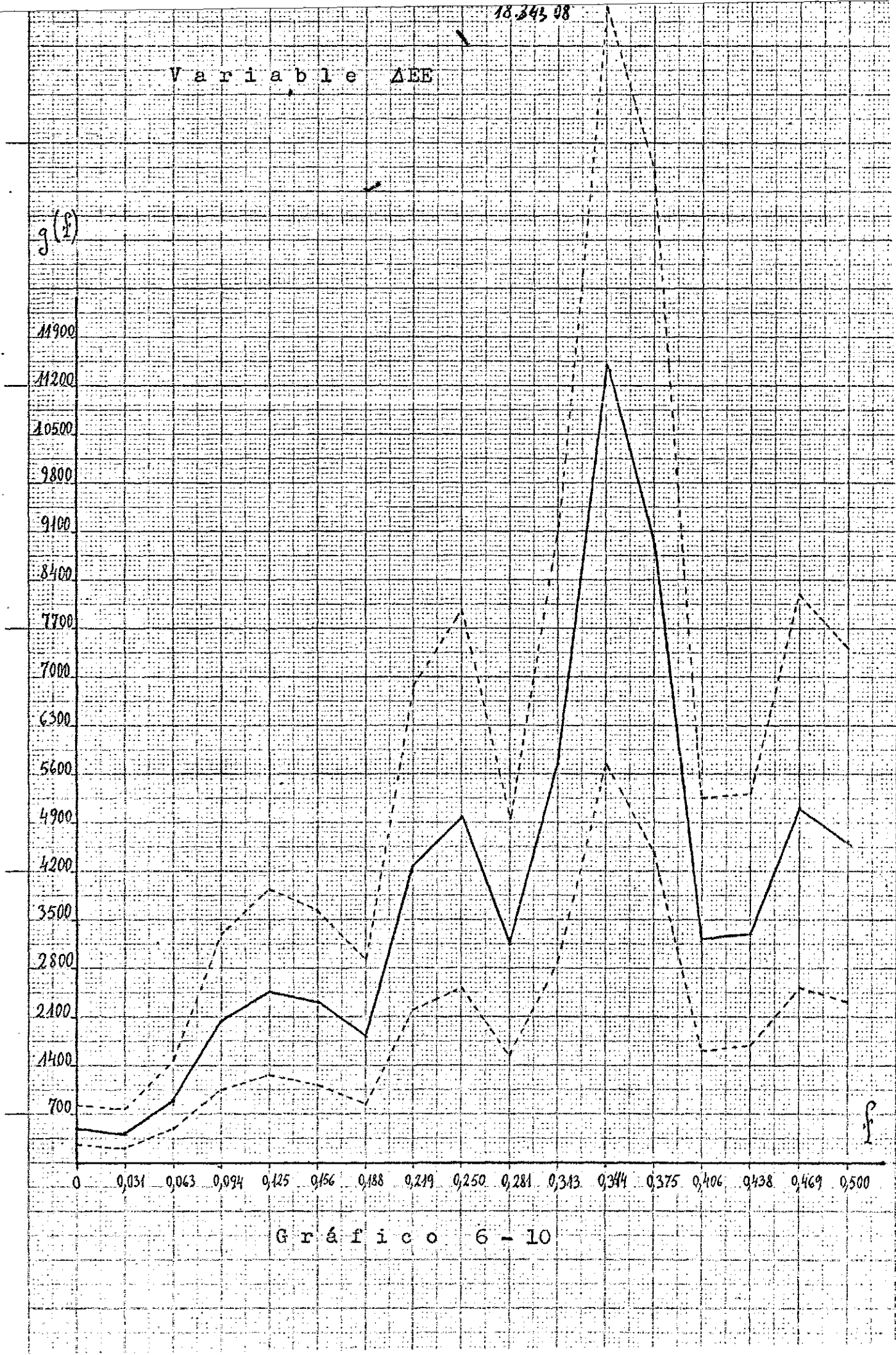
$g(f)$

11900
11200
10500
9800
9100
8400
7700
7000
6300
5600
4900
4200
3500
2800
2100
1400
700
0

0 0,031 0,063 0,094 0,125 0,156 0,188 0,219 0,250 0,281 0,313 0,344 0,375 0,406 0,438 0,469 0,500

f

Gráfico 6 - 10



Variable ΔCA

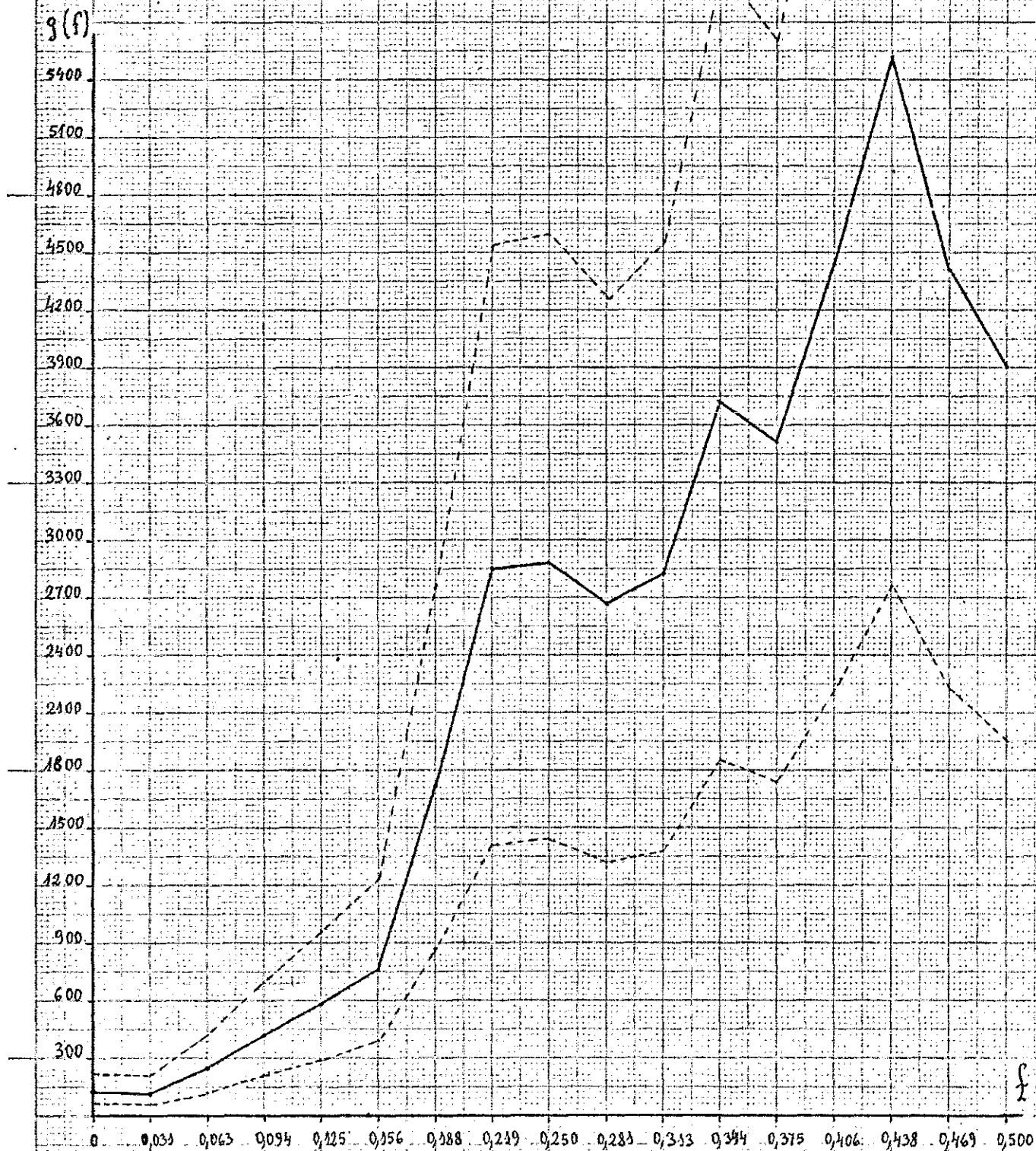


Gráfico 6-11

B I B L I O G R A F I A

G. ARNAIZ.

"Introducción a la estadística teórica".

Ed. Lex Nova (1965).

R.G.D. ALLEN

"Economía matemática"

Ed. Aguilar (1965).

ANDERSON.

"And inequality with a time series application".

Journal of Econometrics (1974).

D.J. AIGNER.

"A compendium on estimation of the autoregressive moving average model from time series data".

International Economic Review Vol. 12 nº 3, Oct. 1971.

BARTLETT

"On the theoretical specification of sampling properties of autocorrelated time series".

J.R.S.S.B. 27-1964.

BOX and D.A. PIERCE.

"Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models".

J.A.S.A. 64-(1970).

G.E.P. BOX and J.M. JENKINS.

Time series analysis forecasting and control
Holden Day (1971)

B. M. BRONN.

"The mathematical theory of linear systems".
Science Paperbacks (1965).

M. DENIS-PAPIN et KAUFMAN.

"Cours de calcul operationnel".
Ed. Dunod (1960).

DYRYMES.

"Econometrics, statistical foundations and applications". (1970). Harper int. ed.

DRAPER AND SMITH.

"Applied Regression Analysis"
John Wiley. (1966)

DURBIN J.

"Efficient estimation of parametric models in moving average models".

Biometrics XLVL (1959).

"The fitting of time serie models"

Review of the international Statistical institute.
(1960).

G.S. FISHMAN.

"Spectral methods in Econometrics".
Haward University Press (1969).

GIKHMEN-SKOROHOD.

"Introduction to the theory of Randon processes".
Ed. W. B. Saunders (1969).

J. GRANGER.

"The typical spectral shape of an Economic variable".

Econometrika XXXIV (Enero 1966).

HANNAN

"Time series analysis"

Science Paperbacks (1960).

"Multiple time series"

Jhon Wiley and sous (1970).

J. HOYO.

"Desestacionalización de series temporales".

Seminario Iberoamericano de Coyuntura. (1975).

G.M. JENKINS.

"General consideration in the analysis of spectra".

Technometrics, Vol. 3, Mayo 1961.

JENKINS and WATT.

"Spectral analysis and its applications".

Holden Day (1968).

M. G. KENDALL and A. STUART.

"The advanced theory of statistics".

Vol. nº 1, nº 2 (1972).

MANN and WALD.

"On the statistical treatment of linear stochastic difference equations".

Econometrica (Julio-Octubre 1943).

MARSCHAK.

"Economic measurement in Policy and Prediction"

Studies in Econometric method.

Ed. Hood. y Koopmans. Cowles Foundations nº 14. (monograph)

NAYLOR.

"Spectral analysis of data generated by simulation experiments with econometric models".

Econometrica Vol. 37 (Abril 1969).

NAYLOR y T.G. SEARS.

"Box-Jenkins methods: An alternative to Econometric Models".

INT. STAT. Rev. Vol. 40 nº 2 (1972).

CH. NELSON.

"The first order moving average process identification, estimation and prediction".

Journal of Econometrics (1974).

H. NERVOLE.

"Spectral analysis of seasonal, adjustment procedures"

Econometrica Vol. 32 (Julio 1964).

PAPOULIS

"Probability, random and stochastic processes"

Mc Graw Hill, International student. Ed. 1965.

E. PARZEN.

"Mathematical considerations in the estimation of spectra".

Technometrics Vol. 3 nº 2 (Mayo 1961).

P. PUIG ADAM.

"Cálculo integral".

Madrid (1964).

M.H. QUENOUILLE.

"Approximate tests of correlation in time series".

J.R.S.S. B (1949)

RODRIGUEZ RODRIGUEZ-ZUÑIGA

"Análisis de una serie histórica, determinación de componentes y formulación de modelos interpretativos"

Cuadernos de Economía Vol. 3 nº 6 (Enero-Abril 1975).

"Incidencia sectorial en la estructura de los precios al por mayor: un estudio comparativo de los sectores agrícola e industrial".

Revista Española de Economía. (Enero-Abril 1975).

RUBIN.

"Consistency of maximum likelihood. Estimates in the explosive case".

Statistical inference in Dynamic Models Commission Cowles Monograph 10.

STRAIKOWSKI, WV, DEVOR.

"Charts for the interpretation and estimation of the second order autoregressive model".

Technometrics Vol. 12 nº 3 (1970).

"Charts for the interpretation and estimation of the second order moving average and mixed first order autoregressive moving average models"

Technometrics Vol. 16 nº 2 (1974).

H. THEIL.

"Principles of econometrics".

John Wiley and Sons (1971).

WALKER.

"Large sample estimation of parametric for autoregressive processes with M.A. residuals".

Biometrika (Junio 1962).

"Asymptotic properties of L.S. estimates of parameters of the spectrum of a stationary nondeterministic time series".

Journal of the Australian Mathematics Society (1964).

WHITTLE.

"Hypothesis testing in time series" (1951). Uppsala Almqvist

"Estimation and informations in stationary time series".

"Arkiv for matematik".

Stockholm (1953).

Yaglom "An introduction to the theory of stationary random functions" Englewood Cliffs prentice Hall (1962)

INDICE

I PARTE

INTRODUCCION

Capítulo I

1.1.- Conceptos básicos.

- 1.1.1.- Definición del proceso estocástico.
- 1.1.2.- Media, autocovarianza y autocorrelación.

1.2.- Conceptos de estacionariedad

- 1.2.1.- Estacionariedad en sentido estricto
- 1.2.2.- Estacionariedad de orden K
- 1.2.3.- Estacionariedad en sentido amplio
- 1.2.4.- Estacionariedad asintótica
- 1.2.5.- Estacionariedad en un intervalo
- 1.2.6.- Estacionariedad periódica.
- 1.2.7.- Estacionariedad incremental

1.3.- Ergodicidad

- 1.3.1.- Definiciones básicas
- 1.3.2.- Ergodicidad en procesos discretos
- 1.3.3.- Ergodicidad en procesos continuos

Capítulo II

2.1.- Descripción de la serie temporal en el ámbito del tiempo.

2.2.- Estimación de las funciones de autocovarianza y autocorrelación

2.3.- Descripción frecuencial de las series temporales

- 2.3.1.- Fundamentos del análisis frecuencial
- 2.3.2.- Espectro de un proceso $x(t)$
- 2.3.3.- Dualidad entre el espectro y la función de autocovarianza.
- 2.3.4.- Espectro de una sucesión
- 2.3.5.- Espectro de una sucesión aleatoria
- 2.3.6.- Respuesta de un filtro lineal
- 2.3.7.- Estimación del espectro.

Capítulo III

- 3.1.- Existencia de las Representaciones en Media Móvil y Autorregresiva
- 3.2.- Representación en Media Móvil
 - 3.2.1.- Estacionariedad
 - 3.2.2.- Invertibilidad
 - 3.2.3.- Función de autocorrelación
 - 3.2.4.- Función de autocorrelación parcial
 - 3.2.5.- MV(1) y MV(2)
- 3.3.- Representación Autorregresiva
 - 3.3.1.- Estacionariedad
 - 3.3.2.- Invertibilidad
 - 3.3.3.- Función de autocorrelación
 - 3.3.4.- Función de autocorrelación parcial
 - 3.3.5.- AR(1) y AR(2)
- 3.4.- Representación Mixta
 - 3.4.1.- Existencia de la Representación Mixta
 - 3.4.2.- Estacionariedad
 - 3.4.3.- Invertibilidad
 - 3.4.4.- Función de autocorrelación
 - 3.4.5.- Función de autocorrelación parcial
 - 3.4.6.- ARMA(1,1)
- 3.5.- Espectros de las Representaciones
 - 3.5.1.- Espectro de una Media Móvil
 - 3.5.2.- Espectro de la Representación Autorregresiva
 - 3.5.3.- Espectro de la Representación Mixta

Capítulo IV

- 4.1.- Existencia de soluciones únicas
- 4.2.- El problema de la identificación
 - 4.2.1.- Identificación a través de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial
 - 4.2.2.- Método de identificación de Stralkowski
- 4.3.- Identificación a través de la comparación entre el espectro teórico de las representaciones y el estimado a partir de los datos
 - 4.3.1.- Ejemplo de identificación a través de la comparación entre los espectros teórico y estimado
- 4.4.- Reducción de una serie no estacionaria a otra que lo sea

- 4.4.1.- Función de autocorrelación de una serie no estacionaria
- 4.5.- Análisis para decidir si debe incorporarse una tendencia determinista.

Capítulo V

- 5.1.- Estimadores de Max. Verosimilitud
- 5.1.1.- Búsqueda sobre el espacio de los parámetros
- 5.1.2.- Linearización
- 5.1.3.- Métodos de estimación de Durbin
- 5.2.- Estimación aproximada
- 5.2.1.- Estimación de Representaciones Autorregresivas
- 5.2.1.1.- Matriz de varianzas y covarianzas
- 5.2.2.- Estimación de la longitud de la Representación Autorregresiva
- 5.2.3.- Estimación en Medias Móviles
- 5.2.3.1.- Matriz de varianzas y covarianzas
- 5.2.4.- Estimación en la Representación Mixta ARMA(k_1, k_2)
- 5.2.4.1.- Matriz de varianzas y covarianzas

II P A R T E

CAPITULO VI

Introducción

- 6.1.- Estudios previos relacionados con el tema
- 6.2.- Los datos utilizados: fuente, ámbito y tiempo
- 6.3.- Estacionariedad
- 6.4.- Índice de precios al por mayor
- 6.4.1.- Índice general de precios al por mayor (IPM)
- 6.4.2.- Alimentos, Bebidas y Tabacos
- 6.4.3.- Productos agrícolas (IPPA)
- 6.4.4.- Productos agrícolas industrializados (IPAI)

- 6.5.- Indices del coste de la vida
 - 6.5.1.- Índice general del coste de la vida (ICV)
 - 6.5.2.- Índice grupo general o Alimentación (ICVA)
- 6.6.- Oferta Monetaria (M)
- 6.7.- Índice de Producción Industrial (IPI)
- 6.8.- Producción de Acero (A)
- 6.9.- Demanda de Energía Eléctrica (EE)
- 6.10.- Consumo de Cemento Artificial (CA)

CONCLUSIONES

APENDICE 1

APENDICE 2

NOTAS A LOS CAPITULOS

CUADROS

GRAFICOS

BIBLIOGRAFIA